

Сравнительный анализ модифицированных методов Грейнджера-Раманатхана и Бейтса-Грейнджера для построения объединенного прогноза динамики экономических показателей

Александр Адольфович Френкель,
Наталья Николаевна Волкова,
Антон Александрович Сурков,
Эвелина Игоревна Романюк
Институт экономики РАН, г. Москва, Россия

Объединение прогнозов является одним из наиболее эффективных методов повышения точности экономического прогнозирования, хорошо зарекомендовавшим себя на практике. Данный подход, по мнению авторов статьи, позволяет использовать всю доступную информацию о прогнозируемом явлении, содержащуюся в индивидуальных методах прогнозирования. Тем более что на сегодняшний день существует множество подходов для построения весовых коэффициентов, с помощью которых интегрируются частные прогнозы.

В статье освещен ряд проблем, возникающих при большом разнообразии методов построения весовых коэффициентов, в первую очередь касающихся интерпретации полученных расчетных значений весовых коэффициентов которые влияют на точность прогнозов. Авторами проанализированы ранее предложенные подходы по модификации наиболее популярных методов построения весовых коэффициентов Грейнджера-Раманатхана и Бейтса-Грейнджера, которые позволяют решить проблему возможности получения отрицательных весов при объединении прогнозов. Кроме того, прокомментированы результаты сравнения на предмет точности прогнозных оценок при использовании модификаций данных методов объединения прогнозов с частными методами прогнозирования и с исходными методами объединения.

Все описанные в работе методы были использованы в прогнозировании некоторых отдельных видов продукции промышленного производства России, представленных в виде годовых данных за период с 1952 по 2018 г.: производства стали, кокса, фанеры и цемента. На основании разработанных прогнозов и проводилось сравнение точности полученных результатов.

Проведенный анализ показывает, что объединение прогнозов остается наиболее эффективным методом повышения точности прогнозирования, а предлагаемые авторами модификации методов построения весовых коэффициентов заслуживают дальнейшего их использования в экономической практике.

Ключевые слова: объединение прогнозов, временные ряды, методы прогнозирования временных рядов, экономический прогноз.

JEL: C22, C 43, O11.

doi: <https://doi.org/10.34023/2313-6383-2019-26-8-14-27>.

Для цитирования: Френкель А.А., Волкова Н.Н., Сурков А.А., Романюк Э.И. Сравнительный анализ модифицированных методов Грейнджера-Раманатхана и Бейтса-Грейнджера для построения объединенного прогноза динамики экономических показателей. Вопросы статистики. 2019;26(8):14-27.

Comparative Analysis of Modified Granger-Ramanathan and Bates-Granger Methods to Combine Forecasts of the Dynamics of Economic Indicators

Alexander A. Frenkel,

Natalia N. Volkova,

Anton A. Surkov,

Evelina I. Romanyuk

Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences (RAS), Moscow, Russia

Combining forecasts is one of the most effective and well-established methods for improving the accuracy of economic forecasting. This approach allows the use of all available information about the predicted phenomenon contained in individual forecasting methods. Moreover, today there are many approaches to construct weights, through which particular forecasts are combined.

But with a large variety of methods for constructing weight coefficients, there are a number of problems, primarily concerning the interpretation of the weight coefficients that affect the accuracy of forecasts. The purpose of this paper is to analyze the previously proposed approaches to modify the most popular methods for constructing the weighting coefficients of Granger-Ramanathan and Bates-Granger, which allow to solve the problem of the possibility of obtaining negative weights when combining forecasts. As well as to compare the accuracy of the results when using data modifications of the methods for combining forecasts with private forecasting methods and with the original methods of combining.

All the methods described in the work were used to predict some specific types of industrial products produced in Russia, presented as annual data for the period from 1952 to 2018: steel, coke, plywood and cement. Based on the developed forecasts, the accuracy of the obtained results was compared.

As a result of the analysis, it was determined that the combination of forecasts remains the most effective method for improving the accuracy of forecasting, and the modifications proposed by the authors to the methods for constructing weight coefficients deserve their further use in economic practice.

Keywords: combining forecasts, time series, time series forecasting methods, economic forecast.

JEL: C22, C43, O11.

doi: <https://doi.org/10.34023/2313-6383-2019-26-8-14-27>.

For citation: Frenkel A.A., Volkova N.N., Surkov A.A., Romanyuk E.I. Comparative Analysis of Modified Granger-Ramanathan and Bates-Granger Methods to Combine Forecasts of the Dynamics of Economic Indicators. *Voprosy statistiki*. 2019;26(8):14-27. (In Russ.)

В экономических исследованиях, а также при принятии управленческих решений часто используются различные методы прогнозирования временных рядов. При этом обычно предпочтение отдается тому методу, который позволил получить более точный прогноз. Но такой подход не всегда является правильным, так как при использовании какого-то одного метода прогнозирования исключается дополнительная информация об изучаемом процессе, которая содержится в других методах.

Объединение прогнозов позволяет учесть значительную часть информации, содержащуюся во временном ряде, и тем самым дает возможность повысить точность прогнозирования. Особенно это важно для прогнозирования в такой предметной области, как экономика, в которой действуют разнонаправленные процессы, плохо поддающие-

ся формализации. Объединение прогнозов, полученных независимо, может способствовать более полному и точному их описанию. Существуют различные методы объединения прогнозов. Подробное их описание содержится в обзорах [1-3].

Целью данной статьи является проведение сравнительного анализа предложенных ранее авторами модифицированных методов для построения объединенного прогноза динамики экономических показателей на основе наиболее популярных методов Грейнджера-Раманатхана и Бейтса-Грейнджера.

Напомним суть методов Грейнджера-Раманатхана [4]. Эти методы базируются на минимизации ошибки прогнозирования, то есть весовые коэффициенты при частных прогнозах в объединенном подбираются таким образом, чтобы сделать ошибку минимальной. При этом

объединенный прогноз наиболее часто строится как линейная комбинация частных прогнозов. Выбор способа построения весовых коэффициентов как раз и определяет суть используемого метода. Существует несколько модификаций метода Грейнджера-Раманатхана.

Наряду с методом без ограничений и постоянных членов, был рассмотрен вариант с использованием ограничений на весовые коэффициенты (сумма весовых коэффициентов равняется единице), а также вариант с включением постоянного члена в формулу объединенного прогноза.

Сущность *первого метода* заключается в следующем. Пусть $F\alpha$ - объединенный прогноз, где α - вектор весовых коэффициентов индивидуальных прогнозов, а F является матрицей значений индивидуальных прогнозов. При этом варианте ограничения на сумму весовых коэффициентов не накладываются. В таком случае ошибка прогноза будет иметь вид:

$$e = x - F\alpha, \quad (1)$$

где x - вектор фактических значений прогнозируемого показателя.

Необходимо определить α таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов ошибок прогнозов, то есть следует минимизировать выражение:

$$(x - F\alpha)^T(x - F\alpha). \quad (2)$$

После проведения необходимых математических преобразований весовые коэффициенты вычисляются по формуле:

$$\hat{\alpha} = (F^T F)^{-1} F^T x. \quad (3)$$

При минимизации выражения (3) нулевое значение для него не будет достигнуто. Однако при таком построении весовых коэффициентов более точному методу прогнозирования будет придаваться больший вес.

Во *втором методе* дополнительно вводится ограничение на сумму весовых коэффициентов:

$$I^T \beta = 1, \quad (4)$$

где I - единичный вектор-строка, а β играет роль вектора весовых коэффициентов.

В этом случае поиск весовых коэффициентов заключается в минимизации уже другого выражения:

$$\min(x - F\beta)^T(x - F\beta) + 2\lambda_B(I^T \beta - 1), \quad (5)$$

где λ_B - множитель Лагранжа:

$$\lambda_B = (I^T \alpha - 1)/I^T(F^T F)^{-1}I. \quad (6)$$

Отсюда вектор весовых коэффициентов определяется по формуле:

$$\hat{\beta} = (F^T F)^{-1} F^T x - \lambda_B (F^T F)^{-1} I. \quad (7)$$

Третий метод также не рассматривает ограничение на весовые коэффициенты, но в объединенный прогноз вводится постоянный член, который необходим для проверки его вклада в значение среднеквадратической ошибки объединенного прогноза.

Введение постоянного члена требует минимизации уже другого выражения:

$$\min(x - \delta_0 I - F\beta)^T(x - \delta_0 I - F\beta), \quad (8)$$

где δ_0 - постоянный член, а δ служит для обозначения вектора весовых коэффициентов (также для отдельного выделения коэффициентов из третьего метода).

Решение будет иметь следующий вид:

$$\delta = \alpha - \delta_0 (F^T F)^{-1} F^T x, \quad (9)$$

$$\delta_0 = I^T e_A / (n - \theta), \quad (10)$$

$$\theta = I^T F (F^T F)^{-1} F^T I. \quad (11)$$

В дальнейшем методика Грейнджера-Раманатхана была дополнительно проверена на практике Р.Т. Клеменом [5], который провел экспериментальные расчеты и показал, что ненулевой постоянный член может привести к ухудшению точности прогнозирования по сравнению даже с индивидуальными прогнозами.

Следует отметить, что указанные методы не учитывают фактор положительности весовых коэффициентов, хотя данное условие является важным.

Из практики известно, что рассматриваемые методы могут давать отрицательные коэффициенты при объединении прогнозов. В этом случае один из весовых коэффициентов будет превышать единицу, тогда для компенсации и выполнения ограничения на сумму весовых коэффициентов (сумма весовых коэффициентов должна равняться единице) появляются отрицательные значения. С практической точки зрения, использование отрицательных коэффициентов допустимо. С теоретической же, - весовые коэффициенты не должны быть как отрицательными, так и превышать единицу. Это связано в первую очередь с

интерпретацией весового коэффициента как доли информации, которая используется в индивидуальном прогнозе и доле самого индивидуального прогноза в объединенном, его вкладом в общий прогноз. В этой связи логично, что доля не может быть отрицательной или превышать единицу. По этой причине на весовые коэффициенты при объединении прогнозов должно накладываться ограничение как на их сумму, так и на их неотрицательность.

Предлагаемые авторами модификации метода наименьших квадратов, использующегося для объединения прогнозов

Авторами ранее были предложены различные модификации методов, использующих метод наименьших квадратов [6, 7]. В данной работе проводится сравнение предложенных авторами методов объединения прогнозов с несколькими методами Грейнджера-Раманатхана.

Метод последовательного объединения прогнозов. Подробно этот метод описан в работе [6]. Кратко повторим здесь его основные положения. Итеративная схема метода приведена на рисунке.

Описание предлагаемой методики последовательного объединения прогнозов проведем на примере объединения¹ четырех методов прогнозирования. Необходимо отметить, что с увеличением числа исходных частных прогнозов в объединении растет и вероятность появления отрицательных коэффициентов.

На *первом этапе* предлагаемой модифицированной методики объединения прогнозов происходит перебор всех объединений двух частных прогнозов: $K(1;2)$, $K(1;3)$, $K(1;4)$, $K(2;3)$, $K(2;4)$, $K(3;4)$ с целью поиска такой пары, при которой все коэффициенты положительны. В первую очередь целесообразно проверять объединение наиболее точного индивидуального метода прогнозирования с другими методами. В случае если имеется несколько пар с положительными коэффициентами, то следует в дальнейшем использовать ту, что дает меньшую среднеквадратическую ошибку.

Предположим, что пара $K(1;2)$ является искомым объединением без отрицательных коэффициентов. В этом случае следует перейти ко *второму этапу* объединения прогнозов, на котором происходят объединения вида: $K(K(1;2);3)$ и $K(K(1;2);4)$, то есть объединение пары, полученной на первом этапе объединения прогнозов



Рисунок. Последовательное объединение прогнозов

¹ В дальнейшем будут использованы следующие обозначения: объединение (комбинация) первого и второго индивидуальных прогнозов - $K(1;2)$, объединение более чем двух индивидуальных методов прогнозирования - $K(1;2;3)$ и т. д.

с оставшимися индивидуальными методами. И в случае если одно из новых объединений второго этапа окажется подходящим, то есть даст положительные коэффициенты, то уже на *третьем этапе* объединение, полученное на втором этапе, объединяется с оставшимся частным прогнозом.

На рисунке приведен стандартный пример модифицированного последовательного объединения, но на практике могут встретиться случаи, когда, например, любые из пар частных прогнозов имеют отрицательные весовые коэффициенты. При этом все равно целесообразно провести еще одну итерацию объединения, так как на втором или третьем этапах отрицательные коэффициенты могут исчезнуть. Кроме того, можно использовать объединение объединений, полученные на предыдущей итерации, например $K(K(1;2);K(3;4))$ или $K(K(1;2;3);K(3;4))$ – объединение результата объединения трех индивидуальных методов прогнозирования с результатом объединения двух индивидуальных методов прогнозирования.

В случае пяти методов объединения прогнозов методология такая же, как и при объединении четырех методов. Более же пяти частных методов прогнозирования объединять нецелесообразно, так как показывает практика, суммарная ошибка прогнозирования перестает уменьшаться и/или остается примерно на том же уровне, или же даже снижает точность прогнозирования.

Использование гребневой регрессии для нахождения весовых коэффициентов. Подробно метод описан в [7]. Здесь напомним его основные положения. Существует несколько модификаций этого метода, но основная их идея заключается в поиске таких весовых коэффициентов для частных прогнозов, чтобы ошибка полученного объединенного прогноза была минимальной. Для этих целей используется метод наименьших квадратов.

Формально задача нахождения весовых коэффициентов при минимизации ошибки объединенного прогноза похожа на задачу линейной регрессии:

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_jx_j + \dots + b_nx_n. \quad (12)$$

Здесь под x_j понимаются прогнозные значения, полученные по индивидуальным методам про-

гнозирования, а под y – объединенный прогноз. Задача линейной регрессии сводится к поиску коэффициентов b_j . Решением этой задачи является использование метода наименьших квадратов при поиске минимума суммы квадратов отклонений зависимой переменной от независимых.

Использование метода наименьших квадратов для целей построения весовых коэффициентов объединенного прогноза ранее было предложено Э.Б. Ершовым [8]. В работе содержались теоретические выкладки, но экспериментальная проверка так и не была проведена.

Проанализируем использование метода регрессионного анализа для построения объединенного прогноза и сравним его с методом Грейнджера-Раманатхана, в котором используются схожие принципы нахождения весовых коэффициентов. Вполне обоснованно можно предположить, что поскольку прогнозы, полученные с помощью разных методов прогнозирования, представляют различные аппроксимации одного и того же временного ряда, то они сильно коррелируют с исходным рядом, а также между собой. Вследствие этого возникает сильная мультиколлинеарность между «независимыми» факторами линейной регрессионной модели.

В регрессионном анализе существуют отработанные методы элиминирования мультиколлинеарности. Один из них – использование для оценки параметров регрессии метода гребневой регрессии (Ridge regression), который был разработан А. Хоэрлом и Р. Кеннардом [13, 14]. Этот метод основан на модификации метода наименьших квадратов и позволяет оценивать параметры регрессии в условиях мультиколлинеарности с меньшими среднеквадратическими ошибками².

Основной целью его использования является исключение эффекта мультиколлинеарности, то есть сильной корреляции между независимыми переменными x_j [14]. При этом могут измениться знаки при коэффициентах b_j и появиться «правильный» знак у соответствующего коэффициента b_j .

В связи с этим гребневая регрессия может стать еще одним возможным вариантом избежать отрицательности весов при объединении прогнозов. Метод гребневой регрессии для определения весовых коэффициентов в объединении прогнозов стал достаточно часто обсуждаться в иностранной

² Более подробно о гребневой регрессии можно также найти в работе [15].

литературе [10, 11]. Но так как коэффициенты в гребневой регрессии не будут давать в сумме единицу, то целесообразно использовать при объединении прогнозов непосредственно δ -коэффициенты, доли переменных в регрессионном уравнении [12].

Как указывалось выше, метод Грейнджера-Раманатхана формально близок к поиску коэффициентов линейной многомерной регрессионной модели (12). В обоих случаях для поиска параметров модели используется минимизация суммы квадратов отклонений точек исходного временного ряда от прогнозных значений. Это обстоятельство позволяет предположить, что подходы регрессионного анализа можно использовать для получения весовых коэффициентов объединенного прогноза. В этом случае роль независимых факторов выполняют прогнозные значения, полученные в результате прогнозирования временного ряда различными методами.

Уравнение оценки параметров для гребневой регрессии выглядит следующим образом:

$$B(K) = (X'X + K)^{-1} X'Y, \quad (13)$$

где $B(K)$ - вектор-столбец гребневых оценок; Y - вектор-столбец зависимой переменной; X - матрица независимых переменных; K - неотрицательная определенная диагональная матрица.

Выбор матрицы K определяет и конкретный метод гребневой регрессии. Нами был использован метод «следа гребневой матрицы», описанный в работе А. Хоэрла и Р. Кеннарда [14], суть которого заключается в том, что берется несколько значений k (обычно не более 10-15 значений) коэффициентов регрессии, в том числе и для $k = 0$. По этой матрице строится график изменения величины коэффициентов в зависимости от значения k , который называется «след гребневой матрицы». Такой подход позволяет найти значения, при которых система достигает стабильности, то есть с увеличением k не происходит изменения знака коэффициентов, и остаточная сумма квадратов меняется незначительно. При $k = 0$ оценки соответствуют коэффициентам обычной регрессии, полученным по методу наименьших квадратов.

Модификация методов Бейтса-Грейнджера.

Еще одним направлением работ авторов по совершенствованию методов объединения прогнозов была модификация методов Бейтса-Грейнджера, которые были первопроходцами в этом направлении [16-18]. Авторы представили и описали целый ряд методов вычисления весовых коэффициентов для объединения прогнозов на основе минимизации дисперсии ошибок частных прогнозов. В работах объединение проводится на основании двух частных прогнозов. При этом авторы сделали примечание, что методы могут быть распространены и на большее число частных методов прогнозирования. Однако обоснования этого в работах не приводится. В работе авторов [16] методы Бейтса-Грейнджера были распространены на число частных прогнозов, равное n .

Следует отметить, что данные методы являются ретроспективными относительно прошлых значений индивидуальных прогнозов. Будем считать, что их количество равно $T - 1$ (число наблюдений). Прогноз же будет определяться на один период вперед - для времени T . Все пять методов удовлетворяют условию на положительность весовых коэффициентов, сумма весовых коэффициентов равна единице.

Далее при описании методов будут использованы следующие обозначения: w_{iT} - весовой коэффициент при i -м частном прогнозе на год T ; $e_{it} = (e_{i0}, e_{i1}, \dots, e_{iT-1})$ - матрица ошибок индивидуальных прогнозов (разница между фактическими данными и прогнозными), $i = 1, \dots, n$ - матрица размера n на $T-1$ - матрицу, где n - число индивидуальных прогнозов; v - количество точек, используемое в методе экспоненциального сглаживания; β_i - корректирующий коэффициент, определяющий каким ошибкам по времени придавать большее значение; при $\beta > 0$ большее значение будет придаваться последним значениям.

В левой части таблицы 1 сведены формулы расчета методов Бейтса-Грейнджера с учетом модификаций, внесенных в работе [18] для объединения двух частных прогнозов. В правой части приведены формулы для объединения большего числа прогнозов. Подробное описание таблицы 1 показано в [19]. В таблице приведены краткие характеристики методов и оптимальные значения используемых параметров.

Таблица 1

Варианты расчета весов, полученные Бейтсом и Грейнджером (1969) и Ньюболдом и Грейнджером (1974)*

№	Объединение двух методов	Объединение n методов	
		выражения для вычисления	оптимальные условия
1	$k_T = \frac{\sum_{i=T-y}^{T-1} e_{2,i}^2}{\sum_{i=T-y}^{T-1} e_{1,i}^2 + \sum_{i=T-y}^{T-1} e_{2,i}^2}$ Учитываются y последних абсолютных ошибок частных прогнозов $e_{i,t}$. Величина веса k_T меняется с течением времени. Изменяя величину y, можно влиять на качество полученных весов.	$w_{i,T} = \frac{\sum_{j=1}^{T-1} \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}^2}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=T-y}^{T-1} \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}^2}, \quad i = 1 \dots n$	$y = 3$
2	$k_T = \alpha k_{T-1} + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=T-y}^{T-1} e_{2,i}^2}{\sum_{i=T-y}^{T-1} e_{1,i}^2 + \sum_{i=T-y}^{T-1} e_{2,i}^2}$ В этом варианте, дополнительно к предыдущему, производится сглаживание весов методом экспоненциального сглаживания для обеспечения стабильности веса y, так как при его небольшом значении веса будут существенно колебаться.	$w_{i,T} = \alpha w_{i,T-1} + (1-\alpha) \frac{\sum_{j=1}^{T-1} \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}^2}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=T-y}^{T-1} \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}^2}, \quad i = 1 \dots n$	$\alpha = 0,5$ $y = 9$ $w_0 = 0,5$
3	$k_T = \frac{\sum_{i=T-y}^{T-1} \beta^i e_{2,i}^2}{\sum_{i=T-y}^{T-1} \beta^i e_{1,i}^2 + \sum_{i=T-y}^{T-1} \beta^i e_{2,i}^2}$ Дисперсия ошибок частного прогноза оценивается не по y последним значениям, а по всем значениям с весом β. При $\beta > 1$ больший вес придается более последним ошибкам.	$w_{i,T} = \frac{\sum_{j=1}^{T-1} \left(\beta^j \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}^2 \right)}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{T-1} \left(\beta^j \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}^2 \right)}, \quad i = 1 \dots n$	$B = 1,5$
4	$k_T = \frac{\sum_{i=T-y}^{T-1} \beta^i e_{2,i}^2 - \sum_{i=T-y}^{T-1} \beta^i e_{1,i} e_{2,i}}{\sum_{i=T-y}^{T-1} \beta^i e_{1,i}^2 + \sum_{i=T-y}^{T-1} \beta^i e_{2,i}^2 - 2 \sum_{i=T-y}^{T-1} \beta^i e_{1,i} e_{2,i}}$ В этом варианте, дополнительно к предыдущему, учитывается корреляция между ошибками частных прогнозов.	$w_{i,T} = \frac{\sum_{j=1}^{T-1} \left(\beta^j \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}^2 \right) \sum_{i=1}^{T-1} \beta^i \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{T-1} \left(\beta^j \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}^2 \right) - n \sum_{i=1}^{T-1} \beta^i \prod_{j=1,j \neq i}^n e_{j,i}}, \quad i = 1 \dots n$	$B = 2,5$
5	$k_T = \alpha k_{T-1} + (1-\alpha) \frac{ e_{2,T-1} }{ e_{1,T-1} + e_{2,T-1} }$ Данный вариант отличается от варианта 2 используемым показателем точности прогноза. Вместо дисперсии ошибки прогноза используется модуль абсолютной ошибки прогноза.	$w_{i,T} = \alpha w_{i,T-1} + (1-\alpha) \frac{\prod_{j=1}^n e_{j,T-1} }{\sum_{j=1}^n e_{j,T-1} }, \quad i = 1 \dots n$	$\alpha = 0,5$ $w_0 = 0,5$

* Второй столбец таблицы заимствован из статьи А.А. Васильева (2014) [20].

Метод попарных предпочтений. В настоящее время метод попарных предпочтений является наиболее часто встречающимся на практике методом объединения прогнозов. Данный метод впервые был широко использован в работе С. Гупта и П. Вилтон, которые предложили собственный подход в определении матрицы попарных предпочтений при объединении прогнозов [21, 22].

Они предложили следующую структуру матрицы попарных сравнений:

$$O = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1} & \dots & \frac{a_1}{a_k} & \dots & \frac{a_1}{a_n} \\ \frac{a_k}{a_1} & \dots & \frac{a_k}{a_k} & \dots & \frac{a_k}{a_n} \\ \dots & \dots & \frac{a_n}{a_1} & \dots & \frac{a_n}{a_n} \\ \frac{a_n}{a_1} & \dots & \frac{a_n}{a_k} & \dots & \frac{a_n}{a_n} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где k изменяется от 1 до n .

Каждый элемент матрицы $o_{ij} = \frac{a_i}{a_j}$ представляет шансы того, что i -й прогноз будет более точным, чем j -й. Расчет весовых коэффициентов для объединенного прогноза при таком подходе происходит через нахождение максимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора матрицы попарных предпочтений. А указанные шансы можно определить через число случаев, когда тот или иной частный метод прогнозирования был точнее остальных.

Более подробно о методе попарных предпочтений можно узнать в [23].

Практические расчеты

Для получения частных прогнозов были использованы следующие методы прогнозирования временных рядов: метод гармонических весов (далее MGTV), метод адаптивного экспоненциального сглаживания с использованием трэкинг-сигнала (MAEKS), метод обычного экспоненциального сглаживания (MEKS) и модель Бокса-Дженкинса (ARIMA).

Для сопоставимости все расчеты проводились на временных рядах о годовом производстве в Российской Федерации ряда товаров, отражающих разные виды производства, в натуральном выражении: стали, кокса, фанеры и цемента. Расчеты охватывали временной промежуток с 1952 по 2018 г. Для нахождения весовых коэффициентов при объединении прогнозов были использованы все указанные выше методы.

Проверка точности прогноза осуществлялась с использованием средней относительной ошибки прогноза, которая не зависит от размерности исходных рядов и, по мнению авторов, наиболее подходит для указанной цели.

В таблицах 2-5 приведены весовые коэффициенты при частных прогнозах для всех методов, участвующих в сравнении.

Таблица 2

Веса для объединения при частных прогнозах с использованием методов Грейнджера-Раманатхана.
Производство стали

Методы	MGV	MEKS	MAEKS	ARIMA
<i>Методы Грейнджера-Раманатхана</i>				
Метод Грейнджера-Раманатхана без ограничений	1,1584	-0,0634	0,1089	-0,2039
Метод Грейнджера-Раманатхана сумма весов=1	1,1584	-0,0636	0,1090	-0,2038
Метод Грейнджера-Раманатхана со свободным членом	1,1600	-0,0627	0,1055	-0,2020
Гребневая регрессия $K=0,01$	0,8584	0,0487	0,0634	0,0218
Метод последовательных приближений $K(K(K(1;2);4)); K(K(3;4);2))$	0,9731	0,0036	0,0038	0,0196
<i>Модифицированные методы Бейтса-Грейнджера*</i>				
1	0,8834	0,0285	0,0279	0,0602
2	0,8819	0,0367	0,0367	0,0447
3	0,8851	0,0358	0,0360	0,0431
4	0,7821	0,0715	0,0728	0,0735
5	0,5348	0,1635	0,1766	0,1250
<i>Метод попарных предпочтений</i>	0,7951	0,0735	0,0546	0,0768

* Здесь и далее в методах Бейтса-Грейнджера приведены последние весовые коэффициенты, используемые для расчета прогноза.

Таблица 3

**Веса для объединения при частных прогнозах с использованием методов Грейнджера-Раманатхана.
Производство кокса металлургического**

Методы	MGV	MEKS	MAEKS	ARIMA
<i>Методы Грейнджера-Раманатхана</i>				
Метод Грейнджера-Раманатхана без ограничений	1,1695	0,1315	-0,1642	-0,1365
Метод Грейнджера-Раманатхана сумма весов=1	1,1702	0,1331	-0,1649	-0,1383
Метод Грейнджера-Раманатхана со свободным членом	1,1754	0,0805	-0,1220	-0,1248
Гребневая регрессия $K=0,02$	0,8479	0,0602	0,0217	0,0630
Метод последовательных приближений $K(K(K(1;4);2)3);K(K(2,4);3))$	0,9680	0,0042	0,0045	0,0233
<i>Модифицированные методы Бейтса-Грейнджера</i>				
1	0,0602	0,8834	0,0285	0,0279
2	0,0447	0,8819	0,0367	0,0367
3	0,0431	0,8851	0,0358	0,0360
4	0,7631	0,0713	0,0789	0,0867
5	0,5348	0,1635	0,1766	0,1250
<i>Метод попарных предпочтений</i>	0,7368	0,1024	0,0799	0,0810

Таблица 4

**Веса для объединения при частных прогнозах с использованием методов Грейнджера-Раманатхана.
Производство фанеры**

Методы	MGV	MEKS	MAEKS	ARIMA
<i>Методы Грейнджера-Раманатхана</i>				
Метод Грейнджера-Раманатхана без ограничений	1,1071	0,0773	-0,1284	-0,0552
Метод Грейнджера-Раманатхана сумма весов=1	1,1069	0,0827	-0,1291	-0,0605
Метод Грейнджера-Раманатхана со свободным членом	1,1192	0,0309	-0,0989	-0,0446
Гребневая регрессия $K=0,01$	0,7640	0,0677	0,0249	0,1379
Метод последовательных приближений $K(K(K(1;4);3);K(K(2;3);4))$	0,9759	0,0066	0,0058	0,0117
<i>Модифицированные методы Бейтса-Грейнджера</i>				
1	0,8834	0,0285	0,0279	0,0602
2	0,8819	0,0367	0,0367	0,0447
3	0,8851	0,0358	0,0360	0,0431
4	0,8587	0,0777	0,0323	0,0313
5	0,1251	0,0434	0,0374	0,0441
<i>Метод попарных предпочтений</i>	0,7452	0,0834	0,0996	0,0718

Таблица 5

**Веса для объединения при частных прогнозах с использованием методов Грейнджера-Раманатхана.
Производство цемента**

Методы	MGV	MEKS	MAEKS	ARIMA
<i>Методы Грейнджера-Раманатхана</i>				
Метод Грейнджера-Раманатхана без ограничений	1,0647	0,0167	-0,0387	-0,0431
Метод Грейнджера-Раманатхана сумма весов=1	1,0645	0,0117	-0,0343	-0,0419
Метод Грейнджера-Раманатхана со свободным членом	1,0660	0,0051	-0,0272	-0,0435
Гребневая регрессия $K=0,01$	0,7638	0,0314	0,0322	0,1674
Метод последовательных приближений $K(K(K(1;3);4);K(K(2;4);3))$	0,9685	0,0054	0,0034	0,0147
<i>Модифицированные методы Бейтса-Грейнджера</i>				
1	0,8834	0,0285	0,0279	0,0602
2	0,8819	0,0367	0,0367	0,0447
3	0,8851	0,0358	0,0360	0,0431
4	0,9760	0,0030	0,0029	0,0182
5	0,5348	0,1635	0,1766	0,1250
<i>Метод попарных предпочтений</i>	0,8540	0,0429	0,0519	0,0512

Примечания к таблицам 2-5. Для метода последовательных приближений коэффициенты приведены для комбинации частных прогнозов, которая обозначена в первом столбце таблиц 2-5. В строке «Гребневая регрессия» в указанных таблицах приводятся Δ -коэффициенты при соответствующих частных прогнозах.

Поскольку в методах Бейтса-Грейнджера величина весового коэффициента зависит от периода времени (см. таблицу 1), то в сводных таблицах 2-5 для этих методов присутствуют последние из весов, которые использовались для расчета прогнозных значений.

Как следует из таблиц 2-5, для всех рядов наиболее точным из частных методов является метод гармонических весов. Весовой коэффициент при нем во всех уравнениях имеет максимальное значение. Более того, в традиционных методах Грейнджера-Раманатхана его значение превышает единицу, в то время как модель Бокса-Дженкинса и один из методов экспоненциального сглаживания имеют отрицательные веса.

Представленные авторами преобразованные методы Грейнджера-Раманатхана и методы Бейтса-Грейнджера имеют только положительные весовые коэффициенты.

Критерием проверки качества прогнозирования служит точность прогнозирования, для оценки которой могут быть использованы:

- среднее квадратическое отклонение;
- средняя абсолютная ошибка;

- средняя относительная ошибка.

Наиболее приемлемой оценкой точности, с нашей точки зрения, является средняя относительная ошибка, которая не зависит от единицы измерения и масштаба признака. Результаты расчетов и сравнение точности по выбранным оценкам для рассматриваемых рядов экономических показателей приведены в таблицах 6-9.

Таблица 6

**Ошибки прогнозирования для объединенных прогнозов.
Производство стали**

Методы	Среднее квадратическое отклонение	Средняя абсолютная ошибка	Средняя относительная ошибка, в процентах
<i>Частные прогнозы</i>			
MGV	2,103	2,311	4,007
MEKS	5,059	3,211	6,223
MAEKS	5,298	3,485	6,780
ARIMA	4,286	2,622	4,400
<i>Методы Грейнджера-Раманатхана</i>			
Метод Грейнджера-Раманатхана без ограничений	0,910	0,558	0,933
Метод Грейнджера-Раманатхана сумма весов=1	0,910	0,559	0,934
Метод Грейнджера-Раманатхана со свободным членом	0,908	0,557	0,932
Гребневая регрессия $K=0,01$	1,497	1,037	1,840
Метод последовательных приближений $K(K(K(1;2);4)); K(K(3;4);2))$	0,919	0,570	1,023
<i>Модифицированные методы Бейтса-Грейнджера</i>			
1	1,535	0,857	1,366
2	1,109	0,734	1,169
3	1,125	0,682	1,081
4	1,168	0,705	1,116
5	2,853	1,706	3,444
Метод попарных предпочтений	1,669	0,952	1,714

Таблица 7

**Ошибки прогнозирования для объединенных прогнозов.
Производство кокса металлургического**

Методы	Среднее квадратическое отклонение	Средняя абсолютная ошибка	Средняя относительная ошибка, в процентах
<i>Частные прогнозы</i>			
MGV	1,399	1,267	1,944
MEKS	2,011	1,306	4,973
MAEKS	2,065	1,409	5,413
ARIMA	1,564	1,339	3,847
<i>Методы Грейнджера-Раманатхана</i>			
Метод Грейнджера-Раманатхана без ограничений	0,328	0,230	0,800
Метод Грейнджера-Раманатхана сумма весов=1	0,328	0,228	0,797
Метод Грейнджера-Раманатхана со свободным членом	0,328	0,232	0,794
Гребневая регрессия $K=0,02$	0,757	0,610	2,130
Метод последовательных приближений $K(K(K(K(1;4);2);3);K(K(2,4);3)))$	0,334	0,229	0,812
<i>Модифицированные методы Бейтса-Грейнджера</i>			
1	0,853	0,857	1,366
2	0,504	0,339	1,175
3	0,524	0,326	1,142
4	0,588	0,355	1,231
5	1,447	0,815	3,232
Метод попарных предпочтений	0,686	0,454	1,673

Таблица 8

**Ошибки прогнозирования для объединенных прогнозов.
Производство фанеры**

Методы	Среднеквадратическое отклонение	Средняя абсолютная ошибка	Средняя относительная ошибка, в процентах
<i>Частные прогнозы</i>			
MGV	0,127	0,066	1,894
MEKS	0,155	0,094	5,613
MAEKS	0,158	0,090	5,238
ARIMA	0,131	0,080	4,804
<i>Методы Грейнджера-Раманатхана</i>			
Метод Грейнджера-Раманатхана без ограничений	0,026	0,015	0,875
Метод Грейнджера-Раманатхана сумма весов=1	0,026	0,015	0,877
Метод Грейнджера-Раманатхана со свободным членом	0,027	0,016	0,934
Гребневая регрессия $K=0,01$	0,047	0,027	1,601
Метод последовательных приближений $K(K(K(1;4);3); K(K(2;3);4))$	0,024	0,015	0,871
<i>Модифицированные методы Бейтса-Грейнджера</i>			
1	0,042	0,022	1,134
2	0,037	0,021	1,049
3	0,039	0,019	1,039
4	0,040	0,021	1,106
5	0,144	0,077	6,060
Метод попарных предпочтений	0,051	0,028	1,662

Таблица 9

**Ошибки прогнозирования для объединенных прогнозов.
Производство цемента**

Методы	Среднеквадратическое отклонение	Средняя абсолютная ошибка	Средняя относительная ошибка, в процентах
<i>Частные прогнозы</i>			
MGV	2,613	2,362	1,859
MEKS	4,780	3,079	6,659
MAEKS	4,992	3,037	6,432
ARIMA	3,280	2,391	5,151
<i>Методы Грейнджера-Раманатхана</i>			
Метод Грейнджера-Раманатхана без ограничений	0,566	0,363	0,788
Метод Грейнджера-Раманатхана сумма весов=1	0,566	0,367	0,794
Метод Грейнджера-Раманатхана со свободным членом	0,564	0,368	0,80
Гребневая регрессия $K=0,01$	1,191	0,869	1,842
Метод последовательных приближений $K(K(K(1;3);4); K(K(2;4);3))$	0,56	0,36	0,800
<i>Модифицированные методы Бейтса-Грейнджера</i>			
1	1,047	0,604	1,279
2	0,786	0,512	1,056
3	0,977	0,536	1,152
4	1,069	0,598	1,408
5	2,163	1,274	3,555
Метод попарных предпочтений	0,954	0,598	1,310

Какие выводы можно сделать из таблиц 6-9? Среди частных методов прогнозирования наилучшие результаты показывает метод гармонических весов. В ряде случаев он дает результаты даже лучше, чем некоторые из методов объединения прогнозов. Так, для всех продуктов MGV дает более точный прогноз, чем пятый метод Бейтса-Грейнджера. Для временного ряда «Производство металлургического кокса» такой метод объединения, как использование гребневой регрессии, а также метод гармонических весов дают лучшие результаты, хотя и различия в точности прогнозирования не столь велики (1,94% - средняя относительная ошибка для MGV и 2,13% - для гребневой регрессии). Здесь необходимо указать, что еще в работе [17] отмечается, что объединенные методы прогнозирования не всегда дают наиболее точные прогнозы, хотя в большинстве случаев объединение прогнозов повышает качество прогнозирования. Наши исследования подтверждают этот вывод.

Остальные частные методы прогнозирования имеют среднюю относительную ошибку прогнозирования в интервале от 3,5 до 7%, причем модель Бокса-Дженкинса (ARIMA) имеет эту ошибку ближе к нижней границе диапазона, а методы экспоненциального сглаживания - к верхней.

Среди методов объединения прогнозов наилучшие результаты показывают методы Грейнджера-Раманатхана, особенно первые два, которые не включают свободный член, поскольку особенность методов как раз и состоит в минимизации ошибки прогнозирования. Предложенные авторами модификации методов Грейнджера-Раманатхана, особенно метод последовательных приближений, хотя и несколько ухудшают точность прогнозирования, но дают вполне приемлемый результат и гарантируют положительность весовых коэффициентов.

Модифицированные авторами методы Бейтса-Грейнджера также дают неплохие результаты, за исключением пятого метода, результаты которого даже хуже, чем при использовании отдельных частных методов прогнозирования. Это может быть объяснено особенностями метода, в котором вместо дисперсии ошибки используется модуль абсолютной ошибки. При этом в результате весовые коэффициенты при частных прогнозах, имеющих наименьшую точность, существенно больше по сравнению с другими методами. Остальные методы объединения, принадлежащие к

этой группе, дают близкие результаты, точность которых ниже, чем у методов Грейнджера-Раманатхана, но сопоставима с результатами объединения с применением гребневой регрессии.

Таким образом, использование объединения прогнозов в большинстве случаев повышает точность прогнозирования временных рядов, которая зависит от используемого метода. Наилучшие результаты с точки зрения минимизации средней относительной ошибки прогнозирования в зависимости от исходного ряда дают методы Грейнджера-Раманатхана без ограничений и с ограничением на сумму коэффициентов, равную единице. Предлагаемый авторами метод последовательных приближений при незначительном ухудшении точности дает легко интерпретируемые весовые коэффициенты. Метод гребневой регрессии и модифицированные методы Бейтса-Грейнджера (за исключением пятого метода) дают близкие результаты более точные, чем индивидуальные прогнозы, и также могут быть рекомендованы к практическому использованию, особенно метод гребневой регрессии, поскольку он опирается на хорошо разработанный математический и вычислительный аппарат.

Литература

1. Френкель А.А., Сурков А.А. Методологические подходы к улучшению точности прогнозирования путем объединения прогнозов // Вопросы статистики. 2015. № 8. С. 17-36.
2. Френкель А.А., Сурков А.А. Определение весовых коэффициентов при объединении прогнозов // Вопросы статистики. 2017. № 12. С. 3-15.
3. Френкель А.А., Волкова Н.Н., Сурков А.А., Романюк Э.И. Сравнительный анализ методов построения объединенного прогноза // Вопросы статистики. 2017. № 7. С. 17-27.
4. Granger C.W.J., Ramanathan R. Improved methods of combining forecasts // Journal of Forecasting. 1984. Vol. 3. P. 197-204.
5. Clemen R.T. Linear constraints and the efficiency of combined forecasts // Journal of Forecasting. 1986. Vol. 5. P. 31-38.
6. Френкель А.А., Волкова Н.Н., Сурков А.А., Романюк Э.И. Пошаговое объединение индивидуальных прогнозов на основе метода Грейнджера-Раманатхана // Вопросы статистики. 2018. Т. 25. № 6. С. 16-24.
7. Френкель А.А., Волкова Н.Н., Сурков А.А., Романюк Э.И. Использование методов гребневой регрессии при объединении прогнозов // Финансы: теория и практика. 2018. Т. 22. № 4(106). С. 6-17.
8. Ершов Э.Б. Об одном методе объединения частных прогнозов // В кн.: Статистические методы ана-

лиза экономической динамики. Уч. зап. по статистике. М.: Наука, 1973. Т. XXII-XXIII. С. 87 - 105.

9. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ Книга 2. М.: Финансы и статистика, 1986. 351 с.

10. Lee Tae-Hwy. Combining Forecasts with Many Predictors. In Advances in Economic Forecasting. Matthew L. Higgins. ed. Kalamazoo. MI: W.E. Upjohn Institute for Employment Research. 2011. P. 149-172.

11. Exterkate P., Groenen P.J.F., Heij C., van Dijk D. Nonlinear Forecasting with Many Predictors Using Kernel Ridge Regression // International Journal of Forecasting. 2016. № 32(3). P. 736-753.

12. Френкель А.А. Производительность труда: проблемы моделирования роста. М.: Экономика, 1984. 176 с.

13. Hoerl A.E. Application of Ridge Analysis to Regression Problems // Chemical Engineering Progress. 1962. № 58(1). P. 54-59.

14. Hoerl A.E., Kennard R.W. Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems // Technometrics. 1970. № 12(1). P. 69-82.

15. Райская Н.Н., Френкель А.А. Применение гребневой регрессии в статистическом моделировании // Экономика и математические методы. 1985. Т. XXI. № 4. С. 715-725.

16. Bates J.M., Granger C.W.J. The Combination of Forecasts // Operational Research Quarterly. 1969. № 20. P. 451-468.

17. Newbold P., Granger C.W.J. Experience with Forecasting Univariate Time Series and the Combination of Forecasts // J. R. Statist. Soc. 1974. № 137. P. 131-164.

18. Granger C.W.J. Invited Review: Combining Forecasts - Twenty Years Later // Journal of Forecasting. 1989. № 8. P. 167-173.

19. Сурков А.А. Один из подходов повышения точности экономического прогнозирования // РИСК: Ресурсы. Информация. Снабжение. Конкуренция. 2017. № 2. С. 140-147.

20. Васильев А.А. Генезис гибридных моделей прогнозирования на основе объединения прогнозов // Вестник ТвГУ. 2014. № 23. С. 316-331.

21. Gupta S., Wilton P.C. Combination of forecasts: an extension // Management Science. 1987. Vol. 3. P. 356-371.

22. Gupta S., Wilton P.C. Combination of Economic Forecasts: An Odds-Matrix Approach // Journal of Business and Economic Statistics. 1988. Vol. 6. P. 373-379.

23. Сурков А.А. Применение метода попарных сравнений при объединении экономических прогнозов // Учет. Анализ. Аудит. 2019. № 3. С. 32-42.

Информация об авторах

Френкель Александр Адольфович - д-р экон. наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт экономики РАН. 117218, г. Москва, Нахимовский просп., д. 32. E-mail: ie_901@inecon.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6860-2118>.

Волкова Наталья Николаевна - канд. экон. наук, ведущий научный сотрудник, Институт экономики РАН. 117218, г. Москва, Нахимовский просп., д. 32. E-mail: nnv@inecon.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7026-2856>.

Сурков Антон Александрович - научный сотрудник, Институт экономики РАН. 117218, г. Москва, Нахимовский просп., д. 32. E-mail: ie_901@inecon.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2464-5853>.

Романюк Эвелина Игоревна - научный сотрудник, Институт экономики РАН. 117218, г. Москва, Нахимовский просп., д. 32. E-mail: Romvel57@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3178-6451>.

References

1. Frenkel A.A., Surkov A.A. Methodological Approaches to Improvement of Forecast Accuracy by Combining Forecasts. *Voprosy statistiki*. 2015;(8):17-36. (In Russ.)

2. Frenkel A.A., Surkov A.A. Determination of Weighting Factors in Combining Forecasts. *Voprosy statistiki*. 2017;1(12):3-15. (In Russ.)

3. Frenkel A.A., Volkova N.N., Surkov A.A., Romanuk E.I. Comparative Analysis of Methods for Constructing a Combined Forecast. *Voprosy statistiki*. 2017;(7):17-27. (In Russ.)

4. Granger C.W.J., Ramanathan R. Improved Methods of Combining Forecasts. *Journal of Forecasting*. 1984;3:197-204.

5. Clemen R.T. Linear Constraints and the Efficiency of Combined Forecasts. *Journal of Forecasting*. 1986;5:31-38.

6. Frenkel A.A., Volkova N.N., Surkov A.A., Romanuk E.I. Step-by-Step Combining of Individual Forecasts Based on the Granger-Ramanathan Method. *Voprosy statistiki*. 2018;25(6):16-24. (In Russ.)

7. Frenkel' A.A., Volkova N.N., Surkov A.A., Romanuk E.I. The Application of Ridge Regression Methods when Combining Forecasts. *Finance: Theory and Practice*. 2018;22(4):6-17. (In Russ.)

8. Ershov E.B. About One Method of Combining Private Forecasts. In: Statistical Methods for the Analysis of Economic Dynamics. Scientific Notes on Statistics. Moscow: Nauka Publ; 1973. Vol. XXII-XXIII. P. 87-105. (In Russ.)

9. Draper N.R., Smith H. *Applied Regression Analysis*. New York: John Wiley & Sons Ltd.; 1966. 407 p. (Russ.ed.: Dreiper N., Smit G. *Prikladnoi regressiionnyi analiz*. Kniga 2. Moscow: Finansy i statistika Publ.; 1986. 351 p.)

10. **Lee Tae-Hwy.** Combining Forecasts With Many Predictors. In: Higgins M.L. (ed.) *Advances in Economic Forecasting*. Kalamazoo, Michigan: W.E. Upjohn Institute for Employment Research; 2011. P. 149-172.
11. **Exterkate P., Groenen P.J.F., Heij C., van Dijk D.** Nonlinear Forecasting With Many Predictors Using Kernel Ridge Regression. *International Journal of Forecasting*. 2016;32(3):736-753.
12. **Frenkel' A.A.** *Labor Productivity: Problems of Growth Modeling*. Moscow: Ekonomika Publ.; 1984. 176 p. (In Russ.).
13. **Hoerl A.E.** Application of Ridge Analysis to Regression Problems. *Chemical Engineering Progress*. 1962;58(1):54-59.
14. **Hoerl A.E., Kennard R.W.** Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems. *Technometrics*. 1970;12(1):69-82.
15. **Rajskaya N.N., Frenkel' A.A.** Use of Ridge Regression in Statistical Modeling. *Economics and Mathematical Methods*. 1985;12(4):715-725. (In Russ.)
16. **Bates J.M., Granger C.W.J.** The Combination of Forecasts. *Operational Research Quarterly*. 1969;(20):451-468.
17. **Newbold P., Granger C.W.J.** Experience with Forecasting Univariate Time Series and the Combination of Forecasts. *Journal of the Royal Statistical Society*. 1974;(137):131-164.
18. **Granger C.W.J.** Invited Review: Combining Forecasts - Twenty Years Later. *Journal of Forecasting*. 1989;(8):167-173.
19. **Surkov A.A.** One Approach to Improve the Accuracy of Economic Forecasting. *RISK: Resources, Information, Supply, Competition*. 2017;(2):140-147. (In Russ.)
20. **Vasil'ev A.A.** Genesis of Hybrid Forecasting Model by Combining Bets. *Herald of Tver State University. Series «Economics and Management»*. 2014;(23):316-331. (In Russ.)
21. **Gupta S., Wilton P.C.** Combination of Forecasts: An Extension. *Management Science*. 1987;(3):356-371.
22. **Gupta S., Wilton P.C.** Combination of Economic Forecasts: An Odds-Matrix Approach. *Journal of Business and Economic Statistics*. 1988;6:373-379.
23. **Surkov A.A.** Application of the Method of Pairwise Comparisons When Combining Economic Forecasts. *Accounting. Analysis. Auditing*. 2019;6(3):32-42. (In Russ.)

About the authors

Alexander A. Frenkel - Dr. Sci. (Econ.), Professor, Chief Researcher, Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences. 32, Nakhimovsky Av., Moscow, 117218, Russia. E-mail: ie_901@inecon.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6860-2118>.

Natalia N. Volkova - Cand. Sci. (Econ.), Leading Researcher, Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences. 32, Nakhimovsky Av., Moscow, 117218, Russia. E-mail: nnv@inecon.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7026-2856>.

Anton A. Surkov - Researcher, Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences. 32, Nakhimovsky Av., Moscow, 117218, Russia. E-mail: ie_901@inecon.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2464-5853>.

Evelina I. Romanyuk - Researcher, Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences. 32, Nakhimovsky Av., Moscow, 117218, Russia. E-mail: Romvel57@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3178-6451>.