

**МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
ПРОИЗВОДСТВА ВРП РЕГИОНОВ СЕВЕРА И АРКТИКИ:  
В ПОИСКАХ ЛУЧШЕЙ МОДЕЛИ\***

**Т.П. Скуфьина,  
С.В. Баранов**

*В статье представлены результаты математико-статистического моделирования динамики производства валового регионального продукта (ВРП) российских регионов Севера и Арктики с использованием различных моделей производственных функций; обоснованы перспективы дальнейших исследований. Разнообразие экономик регионов Севера и Арктики обуславливает необходимость поиска оптимальных вариантов моделей, обеспечивающих адекватность отражения описываемых экономических процессов в этих регионах. При этом использование в моделях индексов физического объема ВРП позволяет элиминировать такие факторы, как влияние инфляции и конъюнктуры цен на мировых рынках. Это особенно важно при исследовании производственных процессов в субъектах российского Севера и Арктики, экономика которых основана на добыче и переработке природных ресурсов.*

*Рассмотрены методические особенности построения трех вариантов математико-статистической модели производства ВРП регионов Севера и Арктики: 1) мультипликативной производственной функции; 2) частного случая мультипликативной производственной функции - функции типа Кобба-Дугласа; 3) производственной функции CES (Constant Elasticity Substitution), характеризующей постоянной эластичностью замещения.*

*Для Архангельской области, Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов, Сахалинской области, Республики Саха (Якутия) и Российской Федерации в целом предложены и обоснованы те из теоретически возможных моделей, которые наилучшим образом описывают влияние факторов производства на конечные результаты экономической деятельности.*

*Авторами сделан вывод о необходимости дальнейшего усовершенствования методологии математико-статистического моделирования применительно к задаче более качественного измерения взаимодействия основных факторов производства и степени их влияния на экономический рост в регионах Севера, Арктике и Российской Федерации в целом.*

*Ключевые слова:* математико-статистическое моделирование, российские регионы Севера и Арктика, валовой региональный продукт, экономический рост, факторы производства.

*JEL:* C51.

Важнейшей фундаментальной проблемой анализа региональной экономики является определение точными методами оптимального территориального сочетания экономических ресурсов. Экономическое и геополитическое значение Севера и Арктики для Российской Федерации обуславливает актуальность (как в научном, так и практическом плане) исследования составной части этой проблемы - специфики производства валового регионального продукта (ВРП) субъектов Севера и Арктики, определяемого взаимодействием ограниченного набора факторов регионального производства.

Продуктивным инструментом в изучении указанной проблемы является использование классических подходов математико-статистического моделирования. Недостаточно широкое распространение такого моделирования в анализе региональной экономики предопределяет теоретико-методологическую актуальность настоящего исследования, направленного, во-первых, на обоснование конкретных методических рекомендаций моделирования динамики производства ВРП регионов Севера и Арктики и, во-вторых, на выявление специфики производства ВРП каждого региона Севера и Арктики на основе анализа инструментальных переменных модели.

*Скуфьина Татьяна Петровна (skufina@ier.kolasc.net.ru) - д-р экон. наук, профессор, директор, ФГБУН «Институт экономических проблем им. Г.П. Лузина» Кольского НЦ РАН (г. Апатиты, Россия).*

*Баранов Сергей Владимирович (bars.vl@gmail.com) - канд. физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник, ФГБУН «Институт экономических проблем им. Г.П. Лузина» Кольского НЦ РАН (г. Апатиты, Россия).*

\* В статье представлены результаты, полученные в рамках исследования, поддержанного грантом РФФИ и Правительства Мурманской области № 17-12-51003.

В результате решения поставленной проблемы управленцы получают инструмент диагностики и прогнозирования состояния и изменений территориальной системы, возможность формирования механизмов функционирования как системы в целом, так и определенных региональных групп и конкретных регионов, оптимизированных для использования в управлении основными факторами регионального производства.

### Главные направления научных изысканий и обоснование задачи исследования

Исследования, касающиеся производства ВРП регионов Севера и Арктики, сводятся к двум основным направлениям.

*Первое из них* связано с вопросами управления социально-экономическим развитием. Исследования посвящены разработке основных направлений совершенствования воспроизводственных процессов на северных территориях и повышения эффективности управления с учетом объективных ограничений и возможностей экономического роста. Считается, что наиболее важные результаты получены зарубежными исследователями, которые закономерно воплощаются в устойчивом социально-экономическом развитии северо-арктических территорий [1, 2]. Вместе с тем углубленный анализ показывает не только ограниченность использования в российских условиях зарубежных методов планирования, прогнозирования воспроизводственных процессов экономики регионов Севера и Арктики и управления ими, но зачастую и неуместность аналогий. Вклад экономики северных территорий зарубежных стран в макроэкономические показатели незначителен, в то время как экономика регионов российского Севера и Арктики составляет базис национальной экономики и основной источник валютных поступлений [3, 4, 5]. Следовательно, применение метода аналогий для переноса результатов зарубежных исследований в российские условия некорректно.

В рамках именно «управленческого» аспекта исследований производства ВРП отмечается преобладание экспертных методов. Во многом это объясняется недостаточной готовностью к практическому применению экономико-математиче-

ских моделей для описания производства ВРП. Это обусловлено несколькими причинами.

Первая причина - в комплексном характере проблем Севера и Арктики, которые отражены в недавно принятом законодательстве, определяющем новые условия и стратегические приоритеты развития этих территорий [1, 4, 6]. Соответственно, упрощенные экономико-математические модели не охватывают все проблемное поле и не согласуются с новыми задачами стратегического развития Севера и Арктики. Сложные же модели, как правило, не подкрепляются реальными данными региональной статистики [7, с. 6-24, 61-69].

Вторая причина состоит в том, что законодательные акты и методические рекомендации органам государственной власти субъектов Российской Федерации по среднесрочному и долгосрочному прогнозированию и планированию<sup>1</sup> определяют приоритет экспертных методов в прогнозировании и планировании производства ВРП. Такой подход можно объяснить тем, что практическое значение бюджетного прогноза гораздо шире и сложнее непосредственно научного прогнозирования; затрагивает иные аспекты, в том числе связанные с определением предельных объемов финансового обеспечения государственных (муниципальных) программ, ресурсных ограничений для иных документов стратегического планирования; включает в качестве обязательных составляющих элементов целеполагание, планирование, программирование.

Третья причина связана с тем, что в современных условиях неопределенности внешнеэкономической среды, влияющих на производство ВРП в каждом регионе России, объективно ограничены для практического применения методы, исходящие из учета имманентно присущих региональным системам свойств, связей, отношений [6, 7].

Четвертая причина - это отмечаемая в последние годы тенденция снижения знаний экономико-математического моделирования в сфере научного сопровождения управления народным хозяйством.

Таким образом, характерной особенностью исследований производства ВРП, ориентированных именно на практику государственного управления экономическим развитием регионов,

<sup>1</sup> Федеральный закон от 28.06.2014 № 172-ФЗ (ред. от 03.07.2016) «О стратегическом планировании в Российской Федерации»; письмо Минфина России от 22.06.2016 № 15-06-05/36228 «О порядке применения требований статьи 170.1 Бюджетного кодекса РФ в части разработки бюджетного прогноза субъекта Российской Федерации на долгосрочный период».

является опора на экспертные методы прогнозирования и планирования. Значимость такого подхода несомненна, особенно при формировании экономической политики определенного региона или экономического района. Однако для системной оценки территориального развития необходимо выявить специфику производства и возможности увеличения ВРП в регионах Российской Федерации при помощи количественных методов.

Эта задача решается в рамках *второго направления исследований*, цель которых - формирование системных представлений об экономике с помощью математических моделей, используемых как в макро-, так и микроэкономике, а также в анализе производственной и финансово-кредитной подсистем экономики.

Развитие прикладных исследований региональной экономики, поиск и использование устойчивых количественных закономерностей, совершенствование методов изучения экономических процессов и их моделей составляют важнейшую часть современных зарубежных и российских исследований [8-12]. Одним из наиболее значимых направлений в области экономико-математического моделирования регионального производства является применение производственных функций (ПФ). Опыт использования ПФ в анализе хозяйственных процессов в различных отраслях экономики советского периода доказал их эффективность при принятии управленческих решений. В настоящее время ПФ используются и в практике прогнозирования развитых стран и международных организаций. Например, в прогнозах МВФ - World Economic Outlook, ООН - World Economic Situation and Prospects, экономического развития Японии, США и т. д.

Вместе с тем для отечественных исследований региональной экономики использование в классическом виде данного метода не характерно. Это обусловлено некоторыми особенностями региональной статистики, а также коротким временным рядом наблюдений параметров моделей [7, с. 66-69; 13, 14]. Поэтому значительные усилия исследователей направлены на адаптацию моделей производственных функций к реальным данным региональной статистики [13-16].

Очевидно, что оба направления исследований должны составлять неразрывное целое, однако отмечается их практически автономное существование. Это обуславливает научную значимость постановки задачи разработки математико-статистических моделей производства ВРП, пригодных для использования в управлении региональными процессами. Выбор объекта исследования - регионы Севера и Арктика - диктуется новыми задачами развития этой макрзоны. Так, в настоящее время определен новый подход к развитию Арктики - через систему опорных зон. Для обоснования параметров развития этих опорных зон необходимы количественные соотношения, определяющие производственные процессы. Исследования показывают, что регионы Севера и Арктики крайне разнообразны по специфике производственных процессов [6, 13]. Следовательно, для разных регионов Севера и Арктики характерны разные эконометрические модели производственных процессов.

Поэтому задача настоящего исследования состоит в *разработке серии эконометрических моделей производства ВРП регионов Севера и Арктики и выбор модели, наилучшим образом описывающей реальные производственные процессы для каждого субъекта*.

Таким образом, научная новизна исследования определяется следующими факторами: 1) отсутствием комплексных эконометрических исследований производства ВРП регионов Севера и Арктики; 2) новыми условиями и задачами развития регионов Арктической зоны Российской Федерации; 3) планируемым установлением реальной связи между теоретико-методологическими достижениями эконометрики и потребностями практики управления территориями Севера и Арктики на региональном и федеральном уровнях.

### **Методики исследования региональных процессов с помощью производственных функций**

Рассмотрим возможности применения ПФ к анализу региональных процессов. Напомним, что классический подход к моделированию производственных процессов с помощью ПФ состоит в анализе динамических рядов экономической

системы, характеризующих выпуск продукции, а также используемые для этого ресурсы (труд и капитал), с целью оценивания параметров ПФ. Сама ПФ выражает зависимость результата производства от затрат ресурсов (факторов производства):

$$Y(t) = F[K(t), L(t)], \quad (1)$$

где  $Y(t)$  - выпуск продукции за год  $t$ ;  $K(t)$  - капитал за год  $t$ , который использовался для выпуска продукции;  $L(t)$  - труд (количество занятых в исследуемой системе) за год  $t$ .

ПФ (1) удовлетворяет следующим свойствам: 1) не убывает (первые производные по труду и капиталу неотрицательные) - с ростом ресурсов выпуск растет; 2) функция является вогнутой (вторые производные по труду и капиталу отрицательные) - с увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется; 3) имеет бесконечные пределы при стремлении труда или капитала к бесконечности - при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск также растет неограниченно.

При исследовании региональных систем за выпуск  $Y$  принимают ВРП, за капитал  $K$  - стоимость основных фондов с учетом амортизации, за труд  $L$  - численность занятых в экономике региона. При этом ВРП и стоимость основных фондов должны быть выражены в сопоставимых ценах. Также можно использовать значения ВРП и капитала в индексах физического объема, приведенных к базисному году. В этом случае численность занятых следует привести к индексному виду, разделив на базисное значение:  $L(t)/L_0$ , где  $L_0$  - численность занятых за базисный год.

Наибольшее практическое распространение получила мультипликативная производственная функция (МПФ), которая имеет вид:

$$Y(t) = A \cdot K(t)^p L(t)^q, \quad (2)$$

$$A > 0,$$

$$0 < p, q < 1.$$

Здесь  $Y(t)$  - ВРП за год  $t$ ;  $K(t)$  - капитал, значение основных фондов региона за год  $t$ ;  $L(t)$  - труд, количество занятых в экономике региона за год  $t$ . Остальные переменные ( $A, p$  и  $q$ ) являются оцениваемыми параметрами и при логарифмировании

соотношения (2) могут быть определены линейным методом наименьших квадратов (МНК).

При ограничениях на параметры  $A, p$  и  $q$  в (2) МПФ удовлетворяет условиям 1) - 3). При этом  $p$  - коэффициент эластичности капитала;  $q$  - коэффициент эластичности труда;  $A$  - коэффициент нейтрального технического прогресса [при постоянных  $p$  и  $q$  выпуск в точке  $(K, L)$  тем больше, чем больше  $A$ ]. Напомним, экономический смысл эластичности заключается в том, что при увеличении (уменьшении) соответствующего фактора на 1% результат увеличится (уменьшится) на количество процентов, равных значению эластичности.

Коэффициенты эластичности  $p$  и  $q$  позволяют судить о характере производства ВРП и типе экономики региона:

$p > q$  - рост производства ВРП является трудосберегающим (интенсивным);

$p < q$  - рост производства ВРП является фондосберегающим (экстенсивным);

$p + q > 1$  - ВРП растет быстрее, чем в среднем растут капитал и труд, то есть производственная функция описывает растущую экономику, в противном случае - стагнирующую; значение этой суммы - количественная характеристика экономического роста.

МПФ является однородной степени  $p + q$ , то есть при увеличении труда и капитала в  $k$  раз выпуск изменится в  $k^{p+q}$  раз.

Частным случаем МПФ (2) является ПФ Кобба-Дугласа (КД) [17] при условии, что сумма коэффициентов эластичности труда и эластичности капитала равна единице:  $p + q = 1$ . В силу этого ограничения ПФ КД имеет два параметра, а не три, как у МПФ (2). Ограничение на сумму коэффициентов эластичности позволяет определить вклад труда и капитала в производство ВРП. Коэффициент эластичности масштаба ПФ КД равен 1.

Коэффициент эластичности замещения факторов производства МПФ равен 1. Эластичность замещения показывает, на сколько процентов необходимо изменить отношение труда и капитала при изменении их предельной нормы замещения на 1%, чтобы объем выпуска не изменился. При этом предельная норма замещения равна количеству единиц, на которые можно уменьшить один

из факторов при увеличении другого фактора на единицу, чтобы выпуск не менялся [18].

Фактически МПФ постулирует, что во всех экономических системах коэффициент эластичности замещения факторов производства равен 1. На самом деле, это не так.

ПФ CES (Constant Elasticity Substitution) имеет вид [19, 20]:

$$Y = \gamma [\delta K^\rho + (1 - \delta)L^\rho]^{-1/\rho}, \quad (3)$$

$\gamma > 0,$   
 $0 < \delta < 1,$   
 $\rho > 0, \rho \neq 1.$

где  $Y$  - ВРП за год  $t$ ;  $K$  - капитал, значение основных фондов региона за год  $t$ ;  $L$  - труд, количество занятых в экономике региона за год  $t$ .

Параметр  $\gamma$  в (3) определяет продуктивность;  $\delta$  - оптимальное распределение факторов производства; параметр  $\rho$  связан с эластичностью замещения следующим образом:  $s = 1/(1 + \rho)$ ;  $\nu$  - эластичность масштаба, то есть при увеличении труда и капитала в  $k$  раз ВРП вырастет в  $k^\nu$  раз. Изначально в CES-функции  $\nu = 1$  [19].

При стремлении  $\rho$  к 0,  $s = 1$  и CES-функция (3) стремится к функции КД. При стремлении  $\rho$  к бесконечности,  $s \rightarrow 0$  и CES-функция стремится к функции Леонтьева. Если же  $\rho = -1$ , то  $s \rightarrow 0.5$  и при  $\nu = 1$  (3) преобразуется к линейной функции.

Считается, что большие значения эластичности замещения факторов производства ( $s$ ) приводят к увеличению вероятности устойчивого роста экономики [21]. Вместе с тем с теоретической точки зрения данный вопрос недостаточно изучен и модель, связывающая темпы роста со значениями эластичности замещения, отсутствует.

Таким образом, CES-функция (3) может использоваться при моделировании производства ВРП с различными коэффициентами эластичности замещения факторов производства. По аналогии с функцией КД, если  $\nu > 0$  ( $< 0$ ), то CES-функция описывает растущую (сторнирующую) экономику.

Подчеркнем, что при практическом использовании ПФ в качестве исходных данных необходимо применять не стоимостные показатели, а индексы физического объема в постоянных ценах. Это диктуется тем, что последние свободны

от колебаний стоимости выпуска, которые обусловлены внешними факторами, когда стоимость одного и того же объема продукции в разные годы может быть разной [14]. Например, стоимость 1 тонны нефти в 2012 и 2015 гг. различается более чем в два раза. В нашем исследовании мы будем использовать показатели, выраженные в индексах физического объема, приведенные к 2000 г.

### Оценивание параметров и сравнение моделей производственных функций

Оценивание параметров мультипликативных ПФ выполняется с помощью линейного метода наименьших квадратов после логарифмирования выражения (2).

CES-функция (3) не допускает линейризации с помощью простой замены переменных, поэтому оценка ее параметров значительно сложнее, чем ПФ (2). Существует два подхода к оцениванию параметров CES- функции.

*Первый подход* состоит в приближении выражения (3) рядом Тейлора в точке  $\rho = 0$  до члена 2-го порядка, последующей линейризации и оценивании параметров с помощью МНК [20]. *Второй подход* заключается в применении нелинейного МНК непосредственно к выражению (3). Мы будем оценивать параметры CES-функции с помощью второго подхода.

Подчеркнем, что при оценивании моделей МПФ, КД и CES важно учитывать ограничения на область изменения параметров; в противном случае оценки будут лишены экономического смысла.

Для выбора лучшей модели мы не можем воспользоваться коэффициентом детерминации, так как рассмотренные ПФ не являются линейными. Понять, какая ПФ лучше описывает тот или иной регион, можно с помощью скорректированного для малых выборок критерия Акаике [22]:

$$AICc = n \ln(MSE) + \frac{1 + m/n}{1 - (m+2)/n}, \quad (4)$$

где  $n$  - количество исходных данных;  $m$  - число параметров модели;  $MSE$  - среднеквадратичная ошибка модели:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (5)$$

где  $y_i$  - фактические данные;  $\hat{y}_i$  - значения, полученные по модели.

Второе слагаемое в (4) является штрафом за использование дополнительных параметров в модели с учетом количества исходных данных. Чем лучше модель, тем меньше значение критерия  $AICc$ .

Критерий (4) не позволяет сделать вывод, насколько хорошо модель соответствует исходным данным. Для нелинейной регрессии отсутствует критерий типа  $R^2$  (коэффициент детерминации) для измерения степени соответствия модели исходным данным. Несмотря на то, что использование  $R^2$  в случае нелинейной модели, строго говоря, не является правильным, мы будем использовать этот критерий лишь для грубой оценки степени соответствия модели исходным данным. Делать вывод о том, какая модель лучше, а какая хуже, мы будем с помощью критерия  $AICc$  (4), который подходит для нелинейной регрессии, параметры которой оценивались по малому количеству данных. Критерий  $R^2$  имеет вид:

$$R^2 = 1 - nMSE / \sum_{i=1}^n (y - E[y])^2, \quad (6)$$

где  $MSE$  - среднеквадратичная ошибка (5);  $E[y]$  - среднее значение, рассчитанное по фактическим данным.

Чем ближе значение  $R^2$  к 1, тем лучше модель соответствует исходным данным. Значение  $R^2$  в случае нелинейной регрессии примерно характеризует процент вариации исходных данных, объясненный моделью. Будем считать, что степень соответствия модели исходным данным приемлема, если  $R^2$  не менее 0,7.

### Результаты моделирования динамики производства ВРП

Объектом исследования являлась группа из 13 регионов России, территории которых включены в зону Севера: Мурманская область, Республика Карелия, Архангельская область, Ненецкий автономный округ, Чукотский автономный округ, Камчатский край, Сахалинская область, Магаданская область, Ямало-Ненецкий автономный округ, Ханты-Мансийский автономный округ - Югра, Республика Коми, Республика Саха (Якутия), Республика Тыва. Из этих регионов полно-

стью включены в зону Арктики четыре субъекта Российской Федерации - Мурманская область, Ненецкий, Чукотский и Ямало-Ненецкий автономные округа<sup>2</sup>.

Для сопоставления результатов по регионам зоны Севера и Арктики с общероссийскими в исследовании были включены данные по России в целом.

Отметим проблему, которая уже обсуждалась авторами. В России ВРП считается только с 1994 г., а по автономным округам - с 2000 г. Задержка в опубликовании данных по ВРП Федеральной службой государственной статистики составляет два года. То есть в начале 2017 г. в распоряжении исследователя имеются данные о ВРП субъектов Российской Федерации (без выделения автономных округов) за 21 год. А при исследовании регионов зоны Севера и Арктики, включающих автономные округа, - за 15 лет. Таким образом, исследователь имеет дело с малыми выборками. Именно по этой причине при оценивании параметров моделей мы использовали скорректированный для малых выборок критерий Акаике (5).

Для моделирования производства ВРП российских регионов зоны Севера и Арктики применялись следующие показатели:

- 1) индекс физического объема ВРП в постоянных ценах в процентах к 2000 г.;
- 2) индекс среднегодовой численности занятых в процентах к 2000 г.;
- 3) индекс стоимости основных фондов с учетом степени износа в постоянных ценах в процентах к 2000 г.

Рассматриваемый период - с 2000 по 2014 г.

Показатель 1) публикуется Росстатом в постоянных ценах в процентах к предыдущему году. Для приведения его значений к 2000 г. использовался цепной метод. Показатель 2) был рассчитан исходя из данных о среднегодовой численности занятых, публикуемых Росстатом. Показатель 3) был рассчитан на основе показателей: стоимость основных фондов на конец года по полной учетной стоимости, степени износа основных фондов на начало года в процентах и индекса-дефлятора ВВП (в процентах к предыдущему году). Сначала

<sup>2</sup> Постановление Совета Министров СССР от 03.01.1983 № 12 (ред. от 03.03.2012) «О внесении изменений и дополнений в Перечень районов Крайнего Севера и местностей, приравненных к районам Крайнего Севера»; Указ Президента Российской Федерации от 02.05.2014 № 296 «О сухопутных территориях Арктической зоны Российской Федерации».

был учтен износ основных фондов, затем выполнено дефлирование для приведения к ценам 2000 г., после чего рассчитан процент стоимости основных фондов относительно 2000 г.

Далее приведены результаты моделирования производства ВРП в регионах зоны Севера, Арктики и всей Российской Федерации с помощью МПФ (2), ПФ КД и ПФ CES (3).

В таблице 1 представлены результаты оценивания параметров МПФ для пяти регионов (Архангельской и Сахалинской областей, Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов и Российской Федерации в целом), для которых значение  $R^2$  не меньше 0,7 (модель объясняет не менее 70% разброса исходных данных). Для остальных регионов МПФ не соответствует исходным данным. Следовательно, значения параметров не могут быть использованы для анализа.

Для Российской Федерации в целом, Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов, Сахалинской области сумма коэффициентов эластичности капитала ( $p$ ) и эластичности труда ( $q$ ) больше 1 (см. таблицу 1). Это значит, что экономика указанных регионов является растущей. Для Архангельской области  $p + q = 1$  - экономика балансирует на грани роста - стагнации.

Для Архангельской области  $p > q$  - имеет место трудосберегающий характер производства. Для Ненецкого, Ямало-Ненецкого автономных округов и Сахалинской области ( $p < q$ ) - рост фондосберегающий. Для Российской Федерации в целом  $p = q$  - характер роста ВРП определить нельзя.

Таблица 1

**Параметры МПФ (2), оцененные для регионов зоны Севера и Российской Федерации в целом за 2000-2014 гг., а также значения критериев  $R^2$  (6) и  $AICc$  (4)**

Регион	$A$	$p$	$q$	$p + q$	$R^2$	$AICc$
Архангельская область	1,29	1,00	0,00	1,00	0,72	115,81
Ненецкий автономный округ	0,37	0,26	1,00	1,26	0,78	132,20
Ямало-Ненецкий автономный округ	0,27	0,28	1,00	1,28	0,85	88,19
Сахалинская область	0,09	0,61	1,00	1,61	0,82	131,47
Российская Федерация	0,01	1,00	1,00	2,00	0,76	106,52

Оценим вклад труда и капитала в производство ВРП с помощью ПФ КД. Лишь для четырех регионов ПФ КД соответствует исходным данным ( $R^2$  0,7) - Архангельской и Сахалинской областей, Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов (см. таблицу 2). Для остальных регионов Севера и Российской Федерации в целом ПФ КД не соответствует исходным данным, и, следовательно, значения параметров не могут быть использованы для анализа. Для Архангельской области и Ненецкого автономного округа ПФ КД является предпочтительнее, чем МПФ, несмотря на одинаковые значения  $R^2$ , значения критерия  $AICc$  для ПФ КД меньше, чем значения  $AICc$  для МПФ (2) по причине того, что ПФ КД имеет меньшее количество оцениваемых параметров, чем МПФ.

Для Архангельской области по обеим моделям (МПФ и КД) коэффициент эластичности капитала  $p = 1$ , а труда -  $q = 0$ . Это означает, что численность занятых в экономике региона не влияет на объем ВРП. Действительно, с 2000 по 2007 г. вариации численности занятых не превышали 5%, а с 2007 г. значение этого показателя постоянно уменьшалось при постоянно растущем ВРП.

Для Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов выпуск на 30% обеспечивается капиталом и на 70% - трудом. Для Сахалинской области доли капитала и труда в ВРП составляли соответственно 62 и 38% (таблица 2). Большой вклад капитала в ВРП этих регионов также следует из значений эластичностей (таблица 1), полученных по модели (2). В то же самое время для Российской Федерации в целом вклады капитала и труда в ВРП одинаковы (таблица 2).

Таблица 2

**Параметры ПФ Кобба-Дугласа, оцененные для регионов зоны Севера и Российской Федерации в целом за 2000-2014 гг., а также значения критериев  $R^2$  (6) и  $AICc$  (4)**

Регион	$A$	$p$	$q$	$R^2$	$AICc$
Архангельская область	1,29	1,00	0,00	0,72	111,99
Ненецкий автономный округ	1,31	0,29	0,71	0,77	129,54
Ямало-Ненецкий автономный округ	0,98	0,30	0,70	0,80	88,65
Сахалинская область	1,52	0,62	0,38	0,80	128,85
Российская Федерация	1,24	1,00	0,00	0,68	107,15

В таблице 3 приведены результаты оценивания параметров ПФ CES (3) для пяти регионов [Архангельской и Сахалинской областей, Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов, Республики Саха (Якутия)] и Российской Федерации в целом - значение  $R^2$  не меньше 0,7 (модель объясняет не менее 70% разброса исходных данных). Для остальных регионов эта ПФ не соответствует исходным данным. Следовательно, значения параметров не могут быть использованы для анализа. В целом для этих пяти регионов значения критерия  $AICc$  для ПФ CES меньше соответствующих значений для МПФ и ПФ КД, следовательно, CES-функция лучше соответствует исходным данным, чем мультипликативная ПФ. Исключение составляет лишь Архангельская область. Кроме того, CES-функция может применяться и к Республике Саха (Якутия), данные по которой не соответствовали МПФ и ПФ КД.

Для обсуждаемых пяти регионов и Российской Федерации в целом значения эластичности масштаба (параметр  $\nu$ ) больше 1, следовательно, эти экономики являются растущими. Напомним, что эластичность масштаба показывает, на сколько процентов изменится объем ВРП при увеличении факторов производства (труда и капитала) на 1%.

Так, для Российской Федерации в целом  $\nu = 5,72$ , что больше суммы коэффициентов эластичности  $p + q = 2$  для ПФ (2), приведенных в таблице 1. Однако противоречия здесь нет, поскольку 2 - это максимальное значение для коэффициента эластичности масштаба (с учетом ограничений на параметры). То есть ПФ (2) может понизить

коэффициент эластичности масштаба. Кроме того, CES-функция лучше соответствует исходным данным по всей Российской Федерации, чем МПФ, так как имеет меньшее значение критерия  $AICc$  (таблицы 1 и 3). Отметим, что для Архангельской области близки значения коэффициента эластичности масштаба, оцененные по ПФ КД и функции CES. Для всех регионов, для которых рассмотренные модели соответствуют исходным данным, за исключением Архангельской области, коэффициент эластичности масштаба по ПФ CES существенно больше 1 (см. таблицу 3). *Этот факт опровергает для северных регионов и Российской Федерации в целом основное положение ПФ КД о равенстве коэффициента эластичности масштаба 1.*

Значения коэффициента эластичности замещения факторов производства (параметр  $s$  в таблице 3), оцененные с помощью ПФ CES, существенно отличаются от 1 (мультипликативная ПФ). Для Российской Федерации в целом  $s = 1,31$ . Для Архангельской области и Ненецкого автономного округа  $s$  близко к 0 (ПФ Леонтьева). Для Ямало-Ненецкого автономного округа можно считать  $s =$  (линейная ПФ). Для Республики Саха (Якутия)  $s = 7,59$ , а для Сахалинской области  $s = 0,41$ . Таким образом, для всех регионов, для которых рассмотренные модели соответствуют исходным данным, коэффициент эластичности замещения факторов производства не равен 1 (таблица 3). *Этот факт опровергает гипотезу о равенстве коэффициента эластичности замещения факторов производства 1, положенную в основу МПФ и ПФ КД.*

Таблица 3

**Параметры ПФ CES (3), оцененные для регионов зоны Севера и Российской Федерации в целом за 2000-2014 гг., значения коэффициента эластичности замещения факторов производства, а также критериев  $R^2$  (6) и  $AICc$  (4)**

Регион	$\gamma$	$\delta$	$\rho$	$\nu$	$s$	$R^2$	$AICc$
Архангельская область	0,59	1,00	91,68	1,17	0,01	0,76	118,38
Ненецкий автономный округ	0,17	1,00	100,00	1,44	0,01	0,89	126,11
Ямало-Ненецкий автономный округ	0,01	0,05	-1,00	2,10	2,28E+07	0,92	83,95
Республика Саха (Якутия)	0,00	0,08	-0,87	5,77	7,59	0,72	102,58
Сахалинская область	0,00	0,15	1,45	5,16	0,41	0,90	126,82
Российская Федерация	0,001	0,15	-0,24	5,72	1,31	0,93	92,52

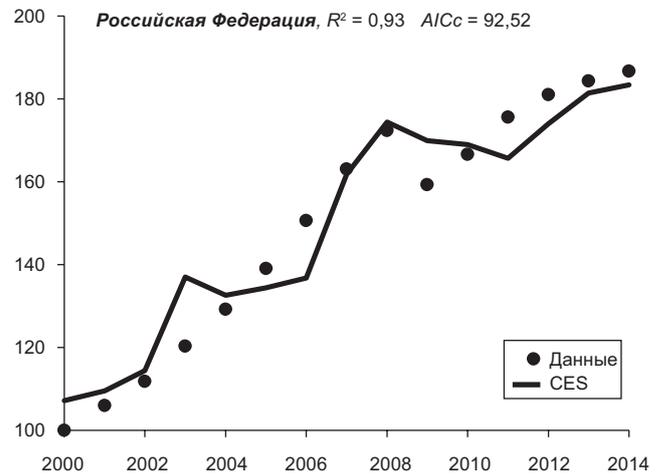
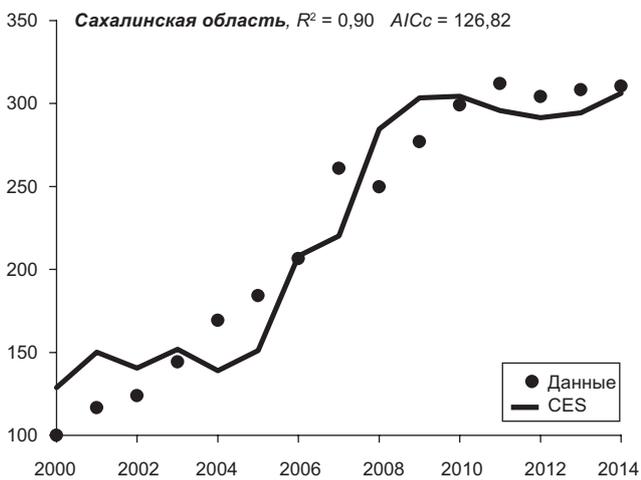
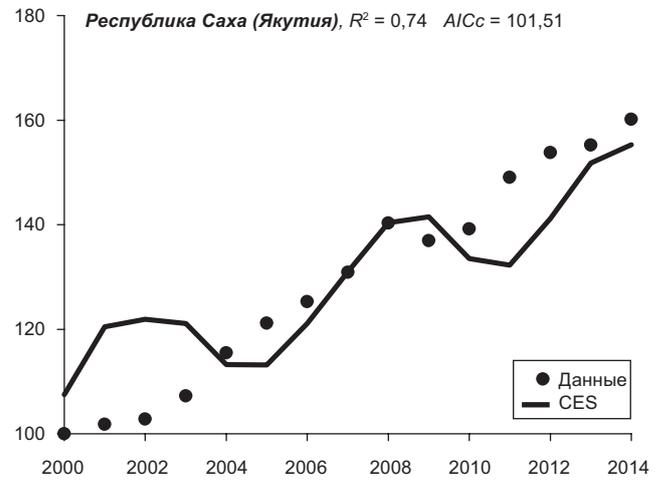
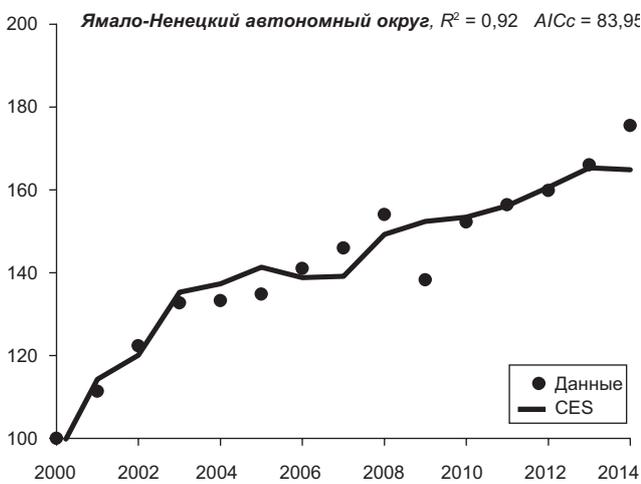
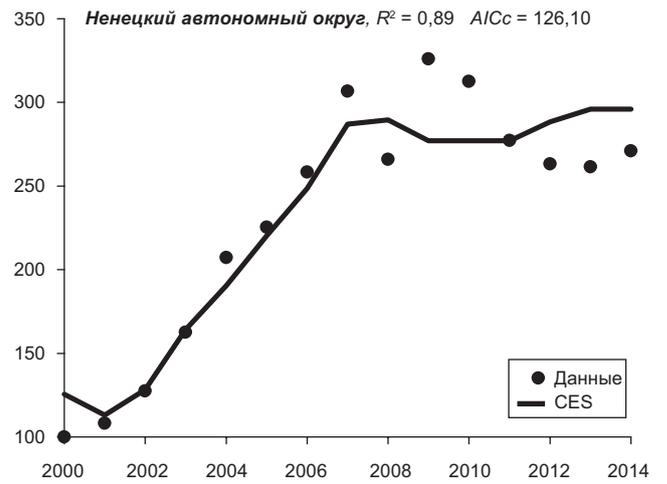
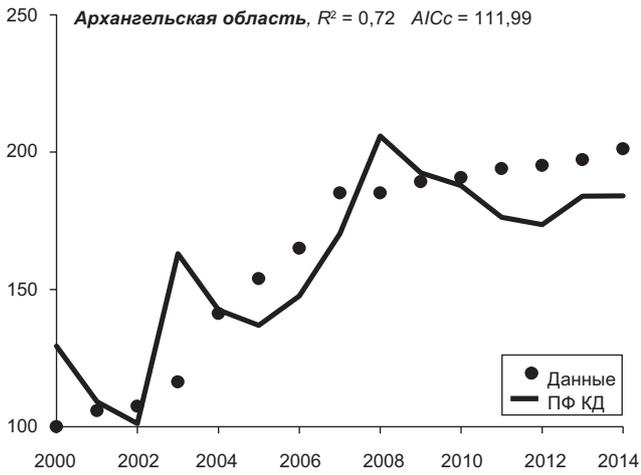


Рисунок. Фактические данные и модельные значения (по лучшей модели) индекса физического объема ВРП (в % к 2000 г.) за 2000-2014 гг., а также значения критериев  $R^2$  (6) и AICc (4)

## Обсуждение результатов моделирования и перспективы дальнейших исследований

Результаты моделирования динамики производства ВРП в регионах зоны Севера и Российской Федерации в целом (таблицы 1–3) показывают, что рассмотренные модели соответствуют данным пяти регионов [Архангельской и Сахалинской областей, Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов, Республика Саха (Якутия)] из 13, а также Российской Федерации в целом (см. рисунок). Возникает вопрос – почему для остальных восьми субъектов эти модели не работают? С учетом ограничений на параметры используемых ПФ для соответствия моделей исходным данным необходимо, чтобы рост факторов производства сопровождался ростом ВРП, и наоборот. Именно это условие нарушается для восьми субъектов зоны Севера. Например, для республик Карелии и Коми с 2007 по 2011 г. наблюдался рост физического объема ВРП на фоне снижения численности занятых и стоимости основных фондов.

Согласно определению, невозможно построить такую ПФ, которая описывает снижение выпуска при росте факторов производства. На первый взгляд, для разрешения данного противоречия достаточно определить функцию, в которой отсутствуют ограничения на неубывание (первые производные не отрицательны) и вогнутость (вторые производные отрицательны). Проблема в том, что оценки параметров для такой функции потеряют экономический смысл. Действительно, ситуация, при которой уменьшение капитала, используемого в производстве, и численности занятых приводит к росту ВРП, абсурдна.

Для преодоления данной проблемы предлагаем в качестве фактора, характеризующего капитал, использовать инвестиции. В этом случае уменьшение инвестиций и численности занятых вполне может привести к росту ВРП. Действительно, в регионе по окончании крупного инвестиционного проекта инвестиции в основной капитал и численность занятых сокращаются, а объем ВРП вполне может увеличиться, так как основные фонды, созданные инвестициями, начинают участвовать в выпуске продукции. Именно это направление исследований представляется актуальным.

Поясним вышесказанное. Накопление аналитической информации дает возможность построения оптимальной модели для каждого региона Севера, которую можно использовать в сложившейся практике государственного управления, например при обсуждении целесообразности реализации инвестиционного проекта. Предположим, в каком-то регионе зоны Севера планируется реализовать крупный проект, сопровождаемый увеличением инвестиций и/или созданием новых рабочих мест. Оценить рост ВРП региона можно с помощью результатов наших расчетов, сведенных в табличную форму. Последовательность итераций: 1) выбрать лучшую модель, в зависимости от которой рассчитать индекс физического объема инвестиций или стоимости основных фондов в постоянных ценах в процентах к предыдущему году и пересчитать это значение цепным методом к базисному году (2000 г.); 2) рассчитать численность занятых в процентах к 2000 г.; 3) для анализируемого региона с помощью лучшей модели и ее параметров рассчитать физический объем ВРП в постоянных ценах в процентах к 2000 г.

Актуальность такого исследования возрастает в связи с постановкой новой задачи управления, направленной на формирование опорных зон Арктики. Наличие обозначенного инструментария позволяет иметь количественно определенные ориентиры для принятия обоснованного управленческого решения по выбору инвестиционных проектов в каждом субъекте Арктической зоны Российской Федерации.

\* \*  
\*

Проведено моделирование производства ВРП в регионах Севера и Арктики за период с 2000 по 2014 г. В качестве моделей использовались МПФ, ПФ КД и функция CES. Установлено, что для пяти регионов Севера и Арктики [Архангельской области, Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов, Республики Саха (Якутия), Сахалинской области], а также для Российской Федерации в целом применима как минимум одна из рассмотренных ПФ (модель описывает не менее 70% разброса исходных данных). Таким образом, производство ВРП этих субъектов Российской Федерации удовлетворяет свойствам

ПФ, перечисленным в разделе «Методики исследования региональных процессов с помощью производственных функций». Производство ВРП остальных регионов не удовлетворяет условиям применимости ПФ.

Для этих пяти регионов и Российской Федерации в целом установлены значения параметров ПФ, коэффициента эластичности замещения факторов производства ВРП, а также с помощью информационного критерия определена лучшая модель. Для Ненецкого и Ямало-Ненецкого автономных округов, Сахалинской области и Российской Федерации в целом лучшей моделью является функция CES. Для Архангельской области лучшая модель - ПФ КД. Оцененные значения параметров ПФ позволяют решать практические задачи государственного регулирования экономических процессов, в том числе в рамках формирования опорных зон развития Арктики.

На основе анализа параметров моделей для этих регионов установлено, что коэффициент эластичности масштаба ( $v$  в функции CES) больше 1, следовательно, факторы производства используются с возрастающей отдачей. Это обусловлено ростом экономики исследуемых регионов.

Значения коэффициента эластичности замещения факторов производства, оцененные с помощью функции CES, показывают их существенный разброс для различных регионов. Этот факт свидетельствует о больших различиях в структуре региональных экономик, которые необходимо учитывать Правительством Российской Федерации при принятии решений. Следовательно, является целесообразным новый подход к управлению Арктической зоной Российской Федерации, основанный на формировании взаимосвязанных инвестиционных проектов в рамках нескольких опорных зон развития.

### Литература

1. Башмакова Е.П. Сравнительная характеристика стратегий развития арктических стран // Север и рынок: формирование экономического порядка. 2013. Т. 1. № 32. С. 15-21.
2. Корчак Е.А. Государственные стратегии зарубежных стран в Арктике // ЭКО. 2013. № 6 (468). С. 149-160.

3. Корчак Е.А., Корчак А.Д. Государственная политика в сфере труда и занятости стран Северной Европы // Север и рынок: формирование экономического порядка. 2014. Т. 6. № 43. С. 46-48.

4. Skufina T.P., Samarina V.P., Krachunov H., Savon D.Yu. Problems of Russia's Arctic development in the context of optimization of the mineral raw materials complex use // Eurasian Mining. 2015. No. 2. P. 18-21.

5. Самарина В.П. Возможности и ограничения применения современных методов районирования территории России к задачам региональной экономики // Региональная экономика: теория и практика. 2008. № 23. С. 75-83.

6. Серова Н.А. Особенности инвестиционной политики регионов Арктической зоны // Север и рынок: формирование экономического порядка. 2016. Т. 50. № 3. С. 13-20.

7. Баранов С.В., Скуфьина Т.П. Моделирование региональных систем / Монография. Изд-во Кольского научного центра РАН, 2014.

8. Hansen B.E. Econometrics. University of Wisconsin. Department of Economics, 2017.

9. DeJong D.N., Dave Ch. Structural macroeconometrics. Princeton: Princeton University Press, 2011.

10. Wickens M. Macroeconomic theory: a dynamic general equilibrium approach. Princeton: Princeton University Press, 2012.

11. Nicola P.C. Mainstream mathematical economics in the 20th century. Springer Science & Business Media, 2013.

12. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

13. Баранов С.В., Скуфьина Т.П. Моделирование производства валового регионального продукта в регионах зоны Севера и несевой части РФ // Вопросы статистики. 2007. № 2. С. 57-62.

14. Skufina T., Baranov S., Samarina V., Shatalova T. Production functions in identifying the specifics of producing gross regional product of Russian Federation // Mediterranean Journal of Social Sciences. Vol. 6. No. 5 S<sub>3</sub>: September. 2015. P. 265-270.

15. Кирилюк И.Л. Модели производственных функций для российской экономики // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 2. С. 293-312.

16. Горидько Н.П., Нижегородцев Р.М. Построение лаговых регрессионных моделей типа Кобба-Дугласа на долгосрочных временных горизонтах // Проблемы управления. 2012. № 3. С. 55-63.

17. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of production // American Economic Review. 1928. Vol. 18 (Supplement). P. 139-165.

18. Blaug M. Economic theory in retrospect. 5th edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. P. 544-546.

19. **Arrow K.J., Chenery B.H., Minhas B.S., Solow R.M.** Capital-labor substitution and economic efficiency // *The Review of Economics and Statistics*. 1961. No. 43 (3). P. 225-250.
20. **Kmenta J.** On estimation of the CES production function // *International Economic Review*. 1967. No. 8. P. 180-189.
21. **Klump R., Preissler H.** CES production functions and economic growth // *Scandinavian Journal of Economics*. 2000. Vol. 102. No. 1. P. 41-56.
22. **Hurvich C.M., Tsai C.L.** Regression and time series model selection in small samples // *Biometrika*. 1989. Vol. 76. No. 2. P. 297-307.

**MATHEMATICAL AND STATISTICAL MODELING OF THE GRP PRODUCTION DYNAMICS IN THE REGIONS OF THE NORTH AND THE ARCTIC: IN SEARCH OF A BETTER MODEL\***

*Tatiana P. Skufina*

*Authors affiliation:* Luzin Institute for Economic Studies of the Kola Science Center, Russian Academy of Sciences (Apatity, Russia). E-mail: skufina@gmail.com.

*Sergey V. Baranov*

*Authors affiliation:* Luzin Institute for Economic Studies of the Kola Science Center, Russian Academy of Sciences (Apatity, Russia). E-mail: bars.vl@gmail.com.

The article presents the results of the mathematical and statistical modeling of GRP production in the regions of the Russian North and the Arctic, using various models of production functions, and substantiates the prospects for further research. The experience of econometric modeling based on real statistics shows that the diversity of economies in the North and the Arctic regions warrants the search for the best model variations that sufficiently describe economic processes in the these particular regions. When modeling the GRP production, were used volume indices, which made it possible to level out the impact of inflation and price conjuncture on world markets. This is especially important when investigating the production processes of the constituent entities of the North and the Arctic, economy of which is based on the extraction and processing of natural resources.

Methodical features have been discussed and econometric models have been constructed for GRP production in the regions of the North and the Arctic in three variants: 1) multiplicative production function; 2) a special case of the multiplicative production function is a function of the Cobb-Douglas type; 3) the production function CES (Constant Elasticity Substitution), characterized by a constant elasticity of substitution.

For the Arkhangelsk region, the Nenets, the Yamal-Nenets autonomous areas, the Sakhalin region and the Russian Federation, in general, have been identified models that best describe the impact of production factors on the final results of economic performance.

The main perspectives of fundamental research are associated with the expansion of the application of other models for production functions and the search for indicators that better describe the actual dynamics of GRP production in the regions of the North, the Arctic and the Russian Federation as a whole.

*Keywords:* mathematical and statistical modeling, Russian regions of the North and the Arctic, gross regional product, economic growth, factors of production.

*JEL:* C51.

\* This article presents the results obtained through research supported by the RFBR and the Government of the Murmansk region, grant No. 17-12-51003.

## References

1. **Bashmakova E.P.** Sravnitel'naya kharakteristika strategii razvitiya arkticheskikh stran [Comparison of development strategies of the Arctic countries]. *The North and the Market: Forming the Economic Order*, 2013, vol. 1, no. 32, pp. 15-21. (In Russ.).
2. **Korchak E.A.** Gosudarstvennye strategii zarubezhnykh stran v Arktike [State strategies of foreign northern countries in the Arctic]. *EKO*, 2013, no. 6 (468), pp. 149-160. (In Russ.).
3. **Korchak E.A., Korchak A.D.** Gosudarstvennaya politika v sfere truda i zanyatosti stran Severnoi Evropy [State policy in the field of labor and employment in the countries of the Northern Europe]. *The North and the Market: Forming the Economic Order*, 2014, vol. 6, no. 43, pp. 46-48. (In Russ.).
4. **Skufina T.P., Samarina V.P., Krachunov H., Savon D.Yu.** Problems of Russia's Arctic development in the context of optimization of the mineral raw materials complex use. *Eurasian Mining*, 2015, no. 2, pp. 18-21.

5. **Samarina V.P.** Vozmozhnosti i ogranicheniya primeneniya sovremennykh metodov raionirovaniya territorii Rossii k zadacham regional'noi ekonomiki [Possibilities and limitations in the applying the modern regionalization methods for the Russian territory to the tasks of the regional economy]. *Regional Economics: Theory and Practice*, 2008, no. 23, pp. 75-83. (In Russ.).
6. **Serova N.A.** Osobennosti investitsionnoi politiki regionov Arkticheskoi zony [Features of the investment policy of the regions of the Arctic zone]. *The North and the Market. Forming the Economic Order*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 13-20. (In Russ.).
7. **Baranov S.V., Skufina T.P.** *Modelirovanie regional'nykh sistem* [Modeling of regional systems]. Apatity, KSC RAS Publ., 2014. (In Russ.).
8. **Hansen B.E.** *Econometrics*. University of Wisconsin. Department of Economics, 2017.
9. **DeJong D.N., Dave Ch.** *Structural macroeconometrics*. Princeton, Princeton University Press, 2011.
10. **Wickens M.** *Macroeconomic theory: A dynamic general equilibrium approach*. Princeton, Princeton University Press, 2012.
11. **Nicola P.C.** *Mainstream mathematical economics in the 20th century*. Springer Science & Business Media, 2013.
12. **Kolemaev V.A.** *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie* [Economic-mathematical modeling]. Moscow, UNITY-DANA Publ., 2005. (In Russ.).
13. **Baranov S.V., Skufina T.P.** Modelirovanie proizvodstva valovogo regional'nogo produkta v regionakh zony Severa i nesevernoi chasti RF [Modeling the production of gross regional product in the regions of the North and non-northern parts of the Russian Federation]. *Voprosy statistiki*, 2007, no. 2, pp. 57-62. (In Russ.).
14. **Skufina T., Baranov S., Samarina V., Shatalova T.** Production functions in identifying the specifics of producing gross regional product of Russian Federation. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, vol. 6, no. 5 S<sub>3</sub>; September, 2015, pp. 265-270.
15. **Kirilyuk I.L.** Modeli proizvodstvennykh funktsii dlya rossiiskoi ekonomiki [Models of production functions for the Russian economy]. *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 293-312. (In Russ.).
16. **Goridko N.P., Nizhegorodtsev R.M.** Postroenie lagovykh regressionnykh modelei tipa Kobba-Duglasa na dolgosrochnykh vremennykh gorizontakh [Elaborating of long-run lag regression models of Cobb-Douglas type]. *Control Sciences*, 2012, no. 3, pp. 55-63. (In Russ.).
17. **Cobb C.W., Douglas P.H.** A theory of production. *American Economic Review*, 1928, vol. 18 (Supplement), pp. 139-165.
18. **Blaug M.** *Economic theory in retrospect*. 5th edition. Cambridge, Cambridge University Press, 1997. Pp. 544-546.
19. **Arrow K.J., Chenery B.H., Minhas B.S., Solow R.M.** Capital-labor substitution and economic efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, 1961, no. 43 (3), pp. 225-250.
20. **Kmenta J.** On estimation of the CES production function. *International Economic Review*, 1967, no. 8, pp. 180-189.
21. **Klump R., Preissler H.** CES production functions and economic growth. *Scandinavian Journal of Economics*, 2000, vol. 102, no. 1, pp. 41-56.
22. **Hurvich C.M., Tsai C.L.** Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 1989, vol. 76, no. 2, pp. 297-307.