

## МЕТОД ТЕМПОРАЛЬНОГО ДЕЗАГРЕГИРОВАНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО РЯДА НА ОСНОВЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ИНДИКАТОРОВ И ПРИНЦИПА СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

**В.И. Моторин**

Автором предложен метод преобразования интервального динамического ряда в согласованный ряд с более мелким шаговым периодом на базе исходных данных о динамике высокочастотного показателя-индикатора. В основу разработки метода положены известный принцип сохранения движения и пропорциональный метод Дентона на базе конечных разностей первого порядка. Получено аналитическое решение общей задачи темпорального дезагрегирования интервального динамического ряда, линейно зависящее от начального значения инструментального параметра дезагрегирования. Рассмотрены способы инкорпорирования в полученное аналитическое решение известных начальных условий Дентона и Шоleta. Обоснована необходимость введения начального условия сохранения формы сезонного цикла динамического ряда мультипликативных поправок и разработан способ его инкорпорирования в аналитическое решение общей задачи темпорального дезагрегирования интервального динамического ряда. Проведено исследование границ идемпотентности и дано формальное описание широкого класса способов формирования рекурсивной базы разработанного метода темпорального дезагрегирования. Изложены основы анализа чувствительности аналитического решения общей задачи темпорального дезагрегирования к малым изменениям как высокочастотных, так и низкочастотных исходных данных.

Рассмотрены операционные приемы применения разработанного метода в практике статистических исследований. Особый практический интерес представляют возможности двухэтапной реализации метода в условиях регламентного пересмотра низкочастотных данных и/или поступления новых данных с течением времени. Вычислительная эффективность разработанного метода темпорального дезагрегирования данных весьма высока, поскольку его практическая реализация ограничивается обращением квадратной матрицы, порядок которой равен числу имеющихся низкочастотных наблюдений.

В статье графически представлены результаты иллюстративных расчетов, выполненных на основе данных Росстата о квартальной динамике валового внутреннего продукта Российской Федерации в ценах 2011 г. и о месячной динамике индекса выпуска товаров и услуг по базовым видам экономической деятельности за период с 2011 по 2015 г.

**Ключевые слова:** интервальный динамический ряд, темпоральное дезагрегирование, принцип сохранения движения, пропорциональный метод Дентона, оптимизационная задача, метод множителей Лагранжа.

**JEL:** C22, C61, C65.

Темпоральное дезагрегирование в широком смысле представляет собой процедуру использования высокочастотных данных о динамике потокового показателя-индикатора для преобразования интервального динамического ряда с более крупным шаговым периодом к формату ряда значений показателя-индикатора (например, преобразования ряда с годовым шагом в квартальный, квартального в месячный и т. п.). Некоторые задачи темпорального дезагрегирования макроэкономических динамических рядов потокового типа имеют большое значение для анализа и прогнозирования экономического роста. В частности, значительный научно-практический интерес представляют попытки построения месячной динамики валового внутреннего продукта или выпуска товаров и услуг по данным

квартальных национальных счетов на основе месячных индикаторов.

**Задача темпорального дезагрегирования.** Пусть  $a$  - упорядоченное множество низкочастотных (например, пятилетних, годовых или квартальных) потоковых данных, состоящее из  $K$  элементов. Далее, пусть  $q$  - упорядоченное  $T$ -элементное множество высокочастотных (например, годовых, квартальных или месячных) потоковых данных. Положим  $T = nK$ , где  $n \geq 2$  - некоторое целое число (соотношение частот, *frequencies ratio*). Иными словами,  $n$  представляет собой число подпериодов (шаговых периодов для высокочастотных данных) в одном шаговом периоде для низкочастотных данных. Динамические ряды значений анализируемого показателя  $a$  и показателя-индикатора  $q$

Моторин Владимир Ильич (motoriny@gmail.com) - канд. экон. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории исследования проблем инфляции и экономического роста, Экспертный институт НИУ ВШЭ (г. Москва, Россия).

будем рассматривать как векторы-столбцы размерности  $K \times 1$  и  $T \times 1$  соответственно.

В задаче темпорального дезагрегирования требуется построить динамический ряд значений анализируемого макроэкономического показателя с более высокой (в  $n$  раз) периодичностью, как можно точнее воспроизводящий особенности динамики показателя-индикатора на всем интервале наблюдений  $t = 1, 2, \dots, T$ . Ясно, что ряд значений показателя-индикатора является решением сформулированной задачи, если векторы  $q$  и  $a$  удовлетворяют интертемпоральному условию

$$Sq = a, \quad (1)$$

где  $S = E_K \otimes e'_n$  - прямоугольная матрица размерности  $K \times T$ , получаемая путем последовательной  $n$ -кратной репликации каждого столбца единичной матрицы  $E_K$  порядка  $K$ ; знак « $\otimes$ » используется для обозначения кронекерова произведения двух матриц, а вектор-строка  $e'_n$  есть результат транспонирования суммирующего вектора-столбца  $e_n$  размерности  $n \times 1$ , состоящего из единичных элементов.

Если исходные векторы не удовлетворяют согласующему условию (1), то в динамический ряд значений показателя-индикатора следует внести корректирующие поправки с тем, чтобы интертемпоральное условие выполнялось. Указанные поправки удобно формализовать в аддитивно-мультипликативной форме

$$h = q + \hat{q}x, \quad (2)$$

где  $h$  - скорректированный высокочастотный динамический ряд;  $x$  - неизвестный  $T$ -элементный вектор-столбец мультипликативных поправок, призванных обеспечить согласование искомого ряда  $h$  с рядом значений анализируемого показателя  $a$ . Здесь размещение специального знака « $\wedge$ » над символом вектора или - ниже - его заключение в угловые скобки « $\langle \rangle$ » обозначает преобразование вектора в диагональную матрицу соответствующего порядка с элементами этого вектора на главной диагонали [1, p. 697].

Комбинируя (2) с согласующим интертемпоральным условием (1), имеем  $Sh = a$  или в терминах мультипликативных поправок  $x$ :

$$S\hat{q}x = a - Sq. \quad (3)$$

Таким образом, задача темпорального дезагрегирования заключается в том, чтобы некоторым оптимальным способом определить набор мультипликативных поправок, обеспечивающих

согласование скорректированного динамического ряда  $h$  и ряда значений анализируемого показателя  $a$  в смысле требования (3).

**Критериальные основы темпорального дезагрегирования.** Нетрудно видеть, что система  $K$  линейных уравнений (3) содержит  $T > K$  неизвестных переменных, то есть вообще говоря, имеет бесконечное множество решений. Следовательно, здесь возникает проблема оптимального выбора на множестве допустимых поправок  $x$ , простейшим способом решения которой является использование пропорционального распределения (*pro rata distribution*). Как показано в [2], в этом случае неизвестный вектор  $x$  определяется по формуле

$$x = \langle Sq \rangle^{-1} a \otimes e_n - e_T.$$

Заметим, что в пределах каждого из  $K$  рассматриваемых периодов времени величины введенных поправок (компоненты вектора  $x$ ) совпадают между собой. Нетрудно проверить, что вектор  $x$ , полученный на основе пропорционального распределения, действительно является решением системы линейных уравнений (3).

Вместе с тем из теории и практики бенчмаркинга динамических рядов (области, которая весьма близко соприкасается с темпоральным дезагрегированием экономических данных [3]) известно, что использование пропорционального распределения часто порождает ступенчатые разрывы в динамике ряда при переходе от последнего подпериода одного периода к первому подпериоду следующего периода. Этот эффект широко известен в современной макроэкономической статистике под названием «проблема скачка» (*step problem*), детальный анализ которой вместе с рекомендациями по ее устранению в практических ситуациях и многочисленными иллюстрациями можно найти в методическом руководстве [4].

Естественный способ избежания скачков в скорректированных высокочастотных динамических рядах связан с применением методов математического программирования для отыскания таких поправок к исходной динамике показателя-индикатора, которые ограничивали бы краткосрочное движение высокочастотных данных в течение всего периода наблюдений. Эта весьма общая идея в специальной литерату-

ре получила собирательное название «принцип сохранения движения» (*movement preservation principle*). Впервые концепция сохранения движения была развита Ф. Дентоном в его работе [5], в которой автором предложены несколько формальных конструкций, включая аддитивный и пропорциональный методы Дентона на основе конечных разностей первого порядка (*additive and proportional first difference Denton methods*), которые до сих пор широко используются в международной статистической практике [4, 6]. Различные аспекты толкования и формализации принципа сохранения движения подробно обсуждаются в монографии [3].

**Целевая функция задачи темпорального деагрегирования.** Формально расширим область действия соотношения (2) на базовый подпериод  $t = 0$ , то есть будем считать, что  $h_0 = q_0 + q_0 x_0$  и  $x_0 = h_0 / q_0 - 1$ . Здесь следует особо подчеркнуть, что величины  $h_0$ ,  $q_0$  и  $x_0$  априори неизвестны.

Целевая функция взвешенного пропорционального метода Дентона на основе конечных разностей первого порядка записывается в виде подлежащей минимизации квадратичной вариации ряда отношений одноименных элементов неизвестного вектора  $h$  и исходного вектора  $q$ :

$$f(h; h_0 / q_0) = w_1 (h_1 / q_1 - h_0 / q_0)^2 + \sum_{t=2}^T w_t (h_t / q_t - h_{t-1} / q_{t-1})^2. \quad (4)$$

Ясно, что функция (4) обращается в нуль тогда и только тогда, когда  $h_t = cq_t$  при всех  $t = 0 \div T$ , где  $c$  - произвольная константа, а символ « $\div$ » между нижней и верхней границами диапазона изменения индекса  $t$  означает, что индекс последовательно пробегает все целочисленные значения в указанном диапазоне. Таким образом, минимизируемая целевая функция взвешенного пропорционального метода Дентона первого порядка предписывает, чтобы отношение  $h_t / q_t$ ,  $t = 0 \div T$  демонстрировало наименьшую изменчивость в течение всего периода наблюдений.

Формула (4) позволяет дать простую геометрическую интерпретацию принципа сохранения движения, составляющего логическую основу пропорционального метода Дентона. Идеальным воплощением принципа сохранения движения, как показано выше, является умножение всех значений показателя-индикатора  $q$  на общую

скалярную константу  $cq = h$ , которое в общем случае не обеспечивает полную увязку высоко- и низкочастотных данных в смысле требования (3). Ступенчатая дифференциация константы  $c$  по периодам  $k = 1 \div K$  рассматриваемого горизонта наблюдений, то есть применение метода пропорционального распределения, помогает устранить этот недостаток, однако в ряде случаев порождает проблему скачка при переходе от периода  $k$  к периоду  $k + 1$  [4, Пример 6.1].

Естественной альтернативой постоянной и ступенчатой функциям в этой ситуации может служить квадратичная функция с ограниченной вариацией типа (4), которая является достаточно гибкой, чтобы увязать подпериодные (высокочастотные) оценки с исходными периодными (низкочастотными), и в то же время ввиду присущей ей «гладкости» не порождает неоправданных скачков. Нетрудно показать, что минимизируемая квадратичная вариация (4) с точностью до постоянного слагаемого, зависящего от величины шагового интервала  $[t, t+1]$ , совпадает с взвешенной суммой квадратов длин всех звеньев ломаной линии, последовательно соединяющей уровни расчетного динамического ряда мультипликативных поправок  $x$ .

Следуя основным положениям статьи [2, Sect. 4], преобразуем квадратичную целевую функцию (4) к комбинированному виду, в котором все члены, содержащие  $x_0$ , представлены отдельными слагаемыми:

$$f(x; x_0) = x' \Delta' W \Delta x - 2w_1 x_1 x_0 + w_1 x_0^2, \quad (5)$$

где  $W$  - диагональная матрица порядка  $T$  с экзогенными весовыми коэффициентами относительной надежности наблюдений  $w = \{w_t \mid t = 1 \div T\}$  на главной диагонали (в практических расчетах вектор  $w$  обычно приводится к нормализованному виду  $\epsilon'_T w = 1$  путем его умножения на соответствующий множитель);  $\Delta$  - невырожденная (и кроме того, унимодулярная) левая (или нижняя) двух-диагональная матрица оператора первых конечных разностей ряда порядка  $T$  с единичной главной диагональю, элементы которой определяются формулой

$$\|\Delta\|_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \quad j = 1 \div T; \\ -1, & \text{если } i = j + 1, \quad j = 1 \div (T - 1); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что матрица квадратичной формы в правой части (5) невырожденна, поскольку представлена произведением трех невырожденных матриц.

Таким образом, задача темпорального дезагрегирования интервального динамического ряда в формальной постановке на основе принципа сохранения движения сводится к условной минимизации взвешенной квадратичной функции (5) векторного аргумента  $x$ , зависящей от неизвестного скалярного параметра  $x_0$ , при наличии системы линейных ограничений (3).

**Решение задачи темпорального дезагрегирования.** Оптимальное решение задачи квадратичного программирования (5), (3) можно получить аналитически в форме однопараметрического семейства векторов  $x(x_0)$ . Функция Лагранжа для этой задачи приобретает следующий вид:

$$L(x; x_0, \lambda) = x' \Delta' W \Delta x - 2w_1 x_1 x_0 + w_1 x_0^2 - \lambda'(S \hat{q} x + S q - a), \quad (6)$$

где  $\lambda$  - векторный множитель Лагранжа, ассоциированный с ограничением (3).

Вычислив частные производные  $L(x; x_0, \lambda)$  по векторам  $x$ ,  $\lambda$  и приравняв их нулю, получим систему  $T + K$  линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2\Delta' W \Delta x - \hat{q} S' \lambda &= 2w_1 x_0 u_1, \\ S \hat{q} x &= a - S q, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $u_1$  - инструментальный вектор-столбец размерности  $T \times 1$  с первой компонентой, равной 1, и остальными компонентами, равными нулю.

Первое уравнение системы (7) в силу невырожденности квадратной матрицы  $D = \Delta' W \Delta$  порядка  $T$  позволяет выразить искомый вектор  $x$  через векторный множитель Лагранжа  $\lambda$  и скалярный параметр  $x_0$  в виде

$$x = \frac{1}{2} D^{-1} \hat{q} S' \lambda + w_1 x_0 D^{-1} u_1.$$

Подставив последнее выражение во второе уравнение системы (7) и проведя несложные преобразования, вычислим линейную (по  $x_0$ ) оценку вектора  $\lambda$ :

$$\lambda = 2(S \hat{q} D^{-1} \hat{q} S')^{-1} (a - S q - w_1 x_0 S \hat{q} D^{-1} u_1).$$

Далее, обратной подстановкой получим однопараметрическое аналитическое решение задачи минимизации квадратичной целевой функции (5) при ограничении (3), зависящее от скалярного параметра  $x_0$ :

$$\begin{aligned} x^*(x_0) &= D^{-1} \hat{q} S' M^{-1} (a - S q) + \\ &+ w_1 x_0 (E_T - D^{-1} \hat{q} S' M^{-1} S \hat{q}) D^{-1} u_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $M = S \hat{q} D^{-1} \hat{q} S'$  - симметричная матрица порядка  $K$ , а  $E_T$  - единичная матрица порядка  $T$ .

Вместе с тем в полученном решении фигурирует обратная матрица  $D^{-1} = \Delta^{-1} W^{-1} (\Delta')^{-1}$  порядка  $T$ , более детальный анализ которой позволяет несколько упростить выражение (8). Нетрудно убедиться, что результатом обращения левой двухдиагональной матрицы  $\Delta$  является нижняя треугольная матрица с единичными ненулевыми элементами, а правой двухдиагональной матрицы  $\Delta'$  - верхняя треугольная матрица с единичными ненулевыми элементами [3, 7]. Можно доказать, что элементы произведения полученных обратных матриц определяются формулой

$$\|\Delta^{-1} (\Delta')^{-1}\|_{ij} = \min\{i, j\}, \quad i = 1 \div T, \quad j = 1 \div T.$$

Поскольку  $W^{-1}$  является диагональной матрицей с обратными величинами весовых коэффициентов на главной диагонали, на основе свойств матричных сомножителей можно показать [7], что симметричная обратная матрица  $D^{-1} = \Delta^{-1} W^{-1} (\Delta')^{-1}$  имеет нисходящую по главной диагонали характерную «уголковую» структуру с элементами

$$\|D^{-1}\|_{ij} = \sum_{t=1}^{\min\{i,j\}} \frac{1}{w_t}, \quad i = 1 \div T, \quad j = 1 \div T. \quad (9)$$

Таким образом, вычисления в соответствии с формулой аналитического решения (8) не требуют обращения матрицы  $D$  высокого порядка  $T = nK$  и сводятся лишь к нахождению обратной матрицы  $M^{-1}$  гораздо более низкого порядка  $K$ . Кроме того, формула (9) позволяет упростить формулу для  $\lambda$  и правую часть (8), так как из нее следует, что

$$D^{-1} u_1 = \frac{1}{w_1} e_T.$$

В результате вектор множителей Лагранжа равен

$$\lambda = 2M^{-1} (a - S q) - 2x_0 M^{-1} S q,$$

а аналитическое решение (8) задачи квадратичного программирования (5), (3) приобретает следующий вид:



$$x^*(x_0) = D^{-1}\hat{q}S'M^{-1}(a - Sq) + x_0(e_T - D^{-1}\hat{q}S'M^{-1}Sq). \quad (10)$$

Важно подчеркнуть, что полученная унифицированная редакция решения не содержит инструментального вектора  $u_1$  и демонстрирует линейную зависимость мультипликативных поправок  $x$  из (2) от неизвестного скалярного параметра  $x_0$ .

**Проблемы выбора скалярного параметра.** Методы темпорального дезагрегирования и бенчмаркинга динамических рядов обладают значительной общностью при принципиальном различии применяемых интерпретационных схем. Оптимизационный подход на основе принципа сохранения движения и аппарата конечных разностей порождает целевые функции, зависящие от одного или нескольких (при использовании конечных разностей более высокого порядка) начальных параметров, для идентификации которых могут привлекаться различные априорные предположения.

В специальной литературе по бенчмаркингу динамических рядов рассматриваются два основных способа выбора скалярного параметра  $x_0$ . В оригинальном варианте своего метода Ф. Дентон постулировал, что начальная точка  $t = 0$  располагается вне периода корректировки ряда значений показателя-индикатора  $q$  и поэтому можно положить  $h_0 = q_0$  [5], откуда  $x_0 = 0$ .

Несколько позже П. Шолет, один из авторов монографии [3], также на полуэмпирической основе показал, что использование условия Дентона, вообще говоря, влечет за собой нарушение принципа сохранения движения в начале первого периода корректировки ряда, и предложил заменить его на  $h_0 / q_0 = h_1 / q_1$ , откуда  $x_0 = x_1$ . Впоследствии эта точка зрения получила широкое признание и нашла отражение в авторитетном международном руководстве [4].

Здесь следует отметить, что формальное обоснование оптимальности начального условия Шолета в форме  $x_0 = x_1$  весьма просто получить [2, 7], если считать скалярный параметр  $x_0$  самостоятельным независимым аргументом целевой функции (5). Из равенства нулю первой частной производной функции Лагранжа (6) по скалярной переменной  $x_0$  вытекает уравнение  $-2w_1x_1 + 2w_1x_0 = 0$ , откуда немедленно следует «оптимальное» условие Шолета.

Однако практические расчеты свидетельствуют о том, что при решении задач темпорального дезагрегирования динамических рядов в весьма распространенных ситуациях, когда совокупность нескольких шаговых подпериодов временного ряда значений показателя-индикатора составляет календарный год (как, например, при дезагрегировании годовых данных на квартальные или месячные), использование начального условия Шолета, вообще говоря, влечет за собой неестественное нарушение формы сезонного цикла динамического ряда  $x$  в начале периода наблюдений. В связи с этим обстоятельством и с учетом ежегодного характера проявления сезонных эффектов естественным образом возникает идея записать начальное условие темпорального дезагрегирования в характерном виде  $x_0 = x_m$ , где  $m$  - количество шаговых подпериодов высокочастотного ряда в календарном году. Разумеется, ввести подобное условие можно тогда и только тогда, когда  $m \geq 2$  - целое число.

**Инкорпорирование начального условия в аналитическое решение.** Очевидное сходство в формальной записи введенного условия сохранения формы сезонного цикла  $x_0 = x_m$  и условия Шолета  $x_0 = x_1$  позволяет использовать для оценки скалярного параметра  $x_0$  оригинальный метод, предложенный в [7] и затем модифицированный в [2]. Основная трудность, которую необходимо преодолеть, здесь состоит в том, что в отличие от начального условия Дентона непосредственный учет как условия Шолета, так и условия сохранения формы сезонного цикла невозможен.

Вместе с тем  $m$ -ю компоненту вектора  $x^*$  можно представить в виде функции скалярного параметра  $x_0$ , если умножить обе части равенства (10) слева на инструментальный  $T$ -мерный вектор-строку  $u'_m$  с единичным  $m$ -м элементом и нулями на всех остальных позициях. Для удобства преобразований запишем унифицированное аналитическое решение (10) задачи квадратичного программирования (5), (3) в редуцированной форме  $x^*(x_0) = r + x_0s$ , где векторы  $r$  и  $s$  размерности  $T \times 1$  нетрудно определить из правой части равенства (10).

По определению вектора  $u'_m$  и в силу условия сохранения формы сезонного цикла  $x_0 = x_m$  скалярное произведение  $u'_mx^*(x_0) = x_m$  должно равняться  $x_0$ . Следовательно, возникает скаляр-

ное уравнение  $x_0 = u'_m r + x_0 u'_m s$  с единственной неизвестной величиной  $x_0$ . При  $u'_m s \neq 1$  оно имеет единственный корень

$$x_0 = \frac{u'_m r}{1 - u'_m s}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} u'_m r &= u'_m D^{-1} \hat{q} S' M^{-1} (a - Sq), \\ u'_m s &= u'_m (e_T - D^{-1} \hat{q} S' M^{-1} Sq) = \\ &= 1 - u'_m D^{-1} \hat{q} S' M^{-1} Sq. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что вектор  $u'_m D^{-1}$  размерности  $1 \times T$  по определению  $u'_m$  представляет собой  $m$ -ю строку (или транспонированный  $m$ -й столбец)  $d'_m$  обратной матрицы  $D^{-1}$ . Поскольку элементы этой симметричной обратной матрицы определяются формулой (9), имеем  $d'_m = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_m, \dots, \sigma_m)$ , где

$$\sigma_i = \sum_{t=1}^i w_t^{-1}, \quad i = 1 \div m.$$

В результате подстановки всех полученных выражений в (11) формула для расчета значения скалярного параметра  $x_0$ , соответствующего начальному условию сохранения формы сезонного цикла  $x_0 = x_m$ , принимает вид

$$x_0 = \frac{d'_m \hat{q} S' M^{-1} (a - Sq)}{d'_m \hat{q} S' M^{-1} Sq}. \quad (12)$$

Здесь следует подчеркнуть, что первоначально неочевидное предположение  $u'_m s \neq 1$  из (11) в ходе выполненных преобразований трансформировалось в неравенство  $d'_m \hat{q} S' M^{-1} Sq \neq 0$ , не являющееся ограничительным с практической точки зрения.

Итак, оптимальное решение (10) задачи квадратичного программирования (5), (3) при выборе начального условия сохранения формы сезонного цикла  $x_0 = x_m$ , то есть с учетом формулы (12), приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} x^*|_{x_0=x_m} &= D^{-1} \hat{q} S' M^{-1} (a - Sq) + \\ &+ \frac{d'_m \hat{q} S' M^{-1} (a - Sq)}{d'_m \hat{q} S' M^{-1} Sq} (e_T - D^{-1} \hat{q} S' M^{-1} Sq). \end{aligned} \quad (13)$$

При этом вектор множителей Лагранжа в оптимальном решении (13), как нетрудно убедиться, равен

$$\lambda^* = 2M^{-1}(a - Sq) - 2 \frac{d'_m \hat{q} S' M^{-1} (a - Sq)}{d'_m \hat{q} S' M^{-1} Sq} M^{-1} Sq. \quad (14)$$

Полученное решение не зависит от скалярного параметра  $x_0$  и представляет расчетный динамический ряд  $x^*$  как сумму линейной функции вектора  $a - Sq$  и второго векторного слагаемого, числовой коэффициент (12) при котором является линейной формой вектора  $a - Sq$ .

#### Об идемпотентности разработанного метода.

Вычислительная процедура, подобная алгоритмам темпорального дезагрегирования или бенчмаркинга динамических рядов, при ее корректном построении должна демонстрировать свойство идемпотентности. В данном случае это означает, что повторное выполнение расчетов по формуле (10) с выбранным значением скалярного параметра  $x_0$  не должно приводить к каким бы то ни было изменениям скорректированного высокочастотного динамического ряда  $h$ , для которого интертемпоральное условие (1) уже выполняется после первого применения выбранного метода темпорального дезагрегирования (или изначально).

Из (13) следует, что при  $a = Sq$  оптимизационная задача темпорального дезагрегирования (5), (3) динамического ряда  $a$  на основе значений показателя-индикатора  $q$  имеет нулевое решение. Таким образом, выбор начального условия сохранения формы сезонного цикла в виде  $x_0 = x_m$  обеспечивает идемпотентность разработанного метода темпорального дезагрегирования, которая, как отмечалось выше, служит важным косвенным признаком корректности подобных алгоритмов математической обработки статистических данных.

Унифицированное аналитическое решение (10) свидетельствует о том, что произвольный выбор значения скалярного параметра  $x_0$  может привести к нарушениям свойства идемпотентности метода [2]. Общий подход к обеспечению идемпотентности заключается в представлении параметра  $x_0$  в виде скалярной функции вектора  $a - Sq$ , которая обращается в нуль при  $a = Sq$ . Если ограничиться простейшим классом линейных функций, то можно положить

$$x_0 = \beta'(a - Sq), \quad (15)$$

где  $\beta$  - некоторый заранее специфицированный вектор-столбец размерности  $K \times 1$ .

Тогда аналитическое решение (10) принимает следующий вид:

$$x^*(x_0) = D^{-1}\hat{q}S'M^{-1}(a - Sq) + \beta'(a - Sq)(e_T - D^{-1}\hat{q}S'M^{-1}Sq). \quad (16)$$

Линейная функция (15) очерчивает широкий класс способов формирования рекурсивной базы разработанного метода темпорального дезагрегирования. Так, если вектор  $\beta$  лежит в гиперплоскости  $K$ -мерного пространства, ортогональной вектору  $a - Sq$ , то  $x_0 = 0$ , и решение (16) соответствует оригинальному постулату Дентона. Далее, если, следуя [2], положить  $\beta' = q'S'M^{-1}/q'S'M^{-1}Sq$ , то возникает решение (16), ассоциированное с начальным условием Шолета  $x_0 = x_1$ . Наконец, при  $\beta' = d'_m\hat{q}S'M^{-1}/d'_m\hat{q}S'M^{-1}Sq$  формула (16) превращается в аналитическое решение (13), соответствующее начальному условию сохранения формы сезонного цикла  $x_0 = x_m$ . Другие варианты спецификации вектора  $\beta$  порождают множество различных начальных условий гибкой реализации разработанного метода темпорального дезагрегирования при соблюдении требования его идемпотентности, которые, по-видимому, вполне заслуживают дополнительного изучения.

**О практическом применения метода в условиях пересмотра данных.** Один из главных вопросов практического использования методов темпорального дезагрегирования (как и методов бенчмаркинга) заключается в том, как корректно применять их в условиях регламентного пересмотра низкочастотных данных и/или поступления новых данных (как низкочастотных, так и высокочастотных) с течением времени. Очевидно, что пересмотр исходных данных для дезагрегирования с горизонтом в несколько недавних периодов, вообще говоря, приводит к нарушению интертемпорального условия (1) для этих периодов. Что же касается поступления новых данных, то их часто требуется дезагрегировать, оставив, однако, неизменной «прошлую» часть динамических рядов, которая была обработана (и, возможно, опубликована) ранее.

Таким образом, остается неясным, какие начальные условия следует выбирать в различных задачах темпорального дезагрегирования и как применять их в процессе комбинированных расчетов в условиях пересмотра или поступления данных. Общая форма унифицированного аналитического решения (10) с явной линейной зависимостью мультипликативных поправок  $x$  из

(2) от скалярного параметра  $x_0$  позволяет пролить свет на эти весьма важные в практическом отношении вопросы.

Рассмотрим дихотомию периода наблюдений на область фиксированных (например, уже опубликованных) данных  $t = 1 \div \tau$  и область пересмотренных и/или новых данных  $t = (\tau + 1) \div T$ . Данные из первой области по определению были подвергнуты темпоральному дезагрегированию ранее (с помощью того или иного конкретного метода), поэтому значение показателя-индикатора  $q_t$  и элемент скорректированного ряда  $h_t$  в граничной точке  $t = \tau$  известны вместе с оценкой параметра  $x_\tau = h_\tau / q_\tau - 1$ . Следовательно, применение формулы (10) с начальным условием  $x_0 = x_\tau$  к данным из второй области обеспечивает относительно гладкое сцепление двух частей расчетного динамического ряда  $x$  при  $t = 1 \div \tau$  и  $t = (\tau + 1) \div T$ .

Известной «платой» за дихотомию, разумеется, является некоторое увеличение совокупной квадратичной вариации сцепленного динамического ряда  $x$  по сравнению со случаем темпорального дезагрегирования данных по всему периоду имеющихся наблюдений в целом. Здесь следует отметить, что «сквозная» идемпотентность подобного двухэтапного алгоритма обеспечивается идемпотентностью упомянутого выше «конкретного метода», который используется на первом этапе работы алгоритма. Повторное применение идемпотентного метода влечет за собой получение оценки  $x_\tau = 0$ , после чего используемый на втором этапе метод темпорального дезагрегирования по формуле (10) автоматически становится идемпотентным.

**Анализ чувствительности решения задачи темпорального дезагрегирования.** Ранее везде предполагалось, что векторное линейное ограничение (3) является связывающим, то есть в процессе расчетов требуется его точное соблюдение. Последствия отказа от этого жесткого требования могут быть оценены с помощью методов анализа чувствительности оптимального решения задачи темпорального дезагрегирования (5), (3) к изменениям ее исходных данных, в качестве которых выступают динамические ряды значений анализируемого показателя  $a$  и показателя-индикатора  $q$  (заметим, что подобные методы широко используются в теории и практике оптимизационного моделирования).

Как известно, множители Лагранжа в оптимальном решении задачи математического программирования с ограничениями в виде равенств представляют собой компоненты градиента целевой функции по правым частям ограничений в точке оптимума (см., например, [8, р. 160, 161]). Действительно, в малой окрестности точки  $x^*$  прирост  $\partial f(a, q; x^*)$  оптимального значения целевой функции (5), рассматриваемый как функция векторных аргументов  $a$  и  $q$ , определяется инфинитезимальным приращением последнего слагаемого функции Лагранжа (6):

$$\begin{aligned}\partial f(a, q; x^*) &= -\lambda' \partial(S\hat{q}x^* + Sq - a) = \\ &= -\lambda' S(\hat{x}^* + E_T) \partial q + \lambda' \partial a,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial f(a, q; x^*)}{\partial a} = \lambda, \quad \frac{\partial f(a, q; x^*)}{\partial q} = -(E_T + \hat{x}^*)S'\lambda, \quad (17)$$

где, как и ранее,  $E_T$  – единичная матрица порядка  $T$ , а вектор множителей Лагранжа  $\lambda$  в точке оптимума  $x^*$  вычисляется по формуле (14).

Таким образом, малые перемещения вектора  $a$  в  $K$ -мерном пространстве или вектора  $q$  в  $T$ -мерном пространстве вдоль соответствующих антиградиентов  $-\lambda$  или  $(E_T + \hat{x}^*)S'\lambda$ , которые определяются инверсией знака в правых частях формул (17), обеспечивают малое уменьшение значения минимизируемой целевой функции (5) по сравнению с ее оптимальным значением в точке (13). Разумеется, особый интерес в данном случае представляет выявление наибольших по абсолютной величине компонент градиентов (17). Анализ чувствительности оптимального решения задачи темпорального дезагрегирования (5), (3) к

изменениям ее исходных данных позволяет выявить те члены динамических рядов значений анализируемого показателя  $a$  и показателя-индикатора  $q$ , которые являются главными источниками наблюдаемых нарушений принципа сохранения движения, измеряемых целевой функцией (5).

Из практических соображений здесь уместно подчеркнуть, что в «классической» задаче темпорального дезагрегирования, когда требуется декомпозировать каждое заданное значение анализируемого макроэкономического показателя на сумму  $n$  слагаемых, анализ чувствительности решения следует проводить только по отношению к малым изменениям значений показателя-индикатора с использованием второй формулы (17).

**Результаты иллюстративных расчетов.** В качестве информационной базы для проведения иллюстративных расчетов с помощью разработанного метода темпорального дезагрегирования использованы данные Росстата о квартальной динамике валового внутреннего продукта Российской Федерации за 2011–2015 гг. в ценах 2011 г.<sup>1</sup>, а также о месячной динамике индекса выпуска товаров и услуг по базовым видам экономической деятельности<sup>2</sup> за тот же период.

Графики исходных рядов динамики валового внутреннего продукта Российской Федерации по кварталам 2011–2015 гг. в млрд рублей в ценах 2011 г. (низкочастотного динамического ряда  $a$ ) и динамики индекса выпуска товаров и услуг по базовым видам экономической деятельности по календарным месяцам 2011–2015 гг. в процентах к декабрю 2010 г. (высокочастотного динамического ряда  $q$ ) изображены на рис. 1 и 2 соответственно.

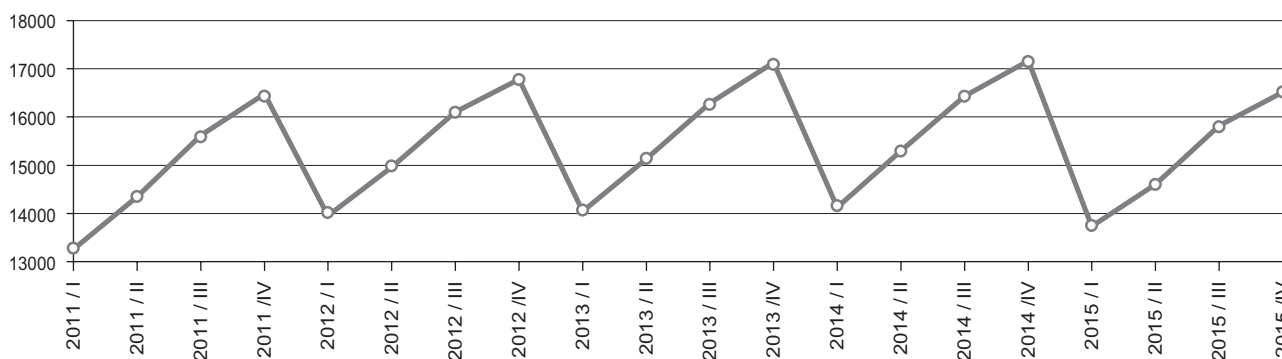


Рис. 1. Ряд квартальной динамики валового внутреннего продукта за 2011–2015 гг. (млрд рублей в ценах 2011 г.)

<sup>1</sup> URL: [http://www.gks.ru/free\\_doc/new\\_site/vvp/kv/tab6.htm](http://www.gks.ru/free_doc/new_site/vvp/kv/tab6.htm).

<sup>2</sup> URL: [http://www.gks.ru/free\\_doc/new\\_site/vvp/tab46.htm](http://www.gks.ru/free_doc/new_site/vvp/tab46.htm).



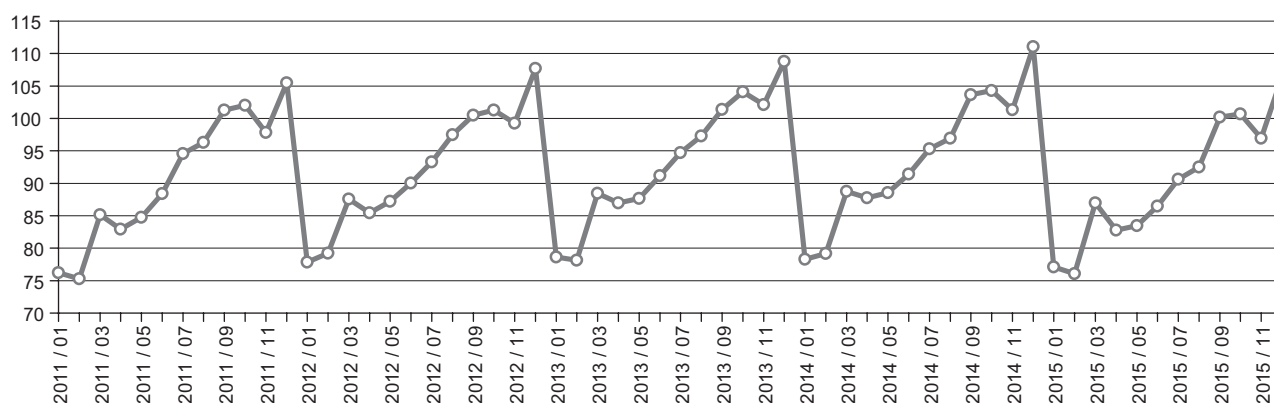


Рис. 2. Ряд месячной динамики индекса выпуска товаров и услуг по базовым видам экономической деятельности за 2011-2015 гг. (в % к декабрю 2010 г.)

На рис. 3 представлены результаты решения задачи темпорального дезагрегирования квартальной динамики валового внутреннего продукта на основе месячных данных о динамике индекса выпуска товаров и услуг по базовым видам эко-

номической деятельности (ИВБВЭД) по формуле (10) с единичными весовыми коэффициентами при выборе начального условия сохранения формы сезонного цикла (12), а также по методу пропорционального распределения.

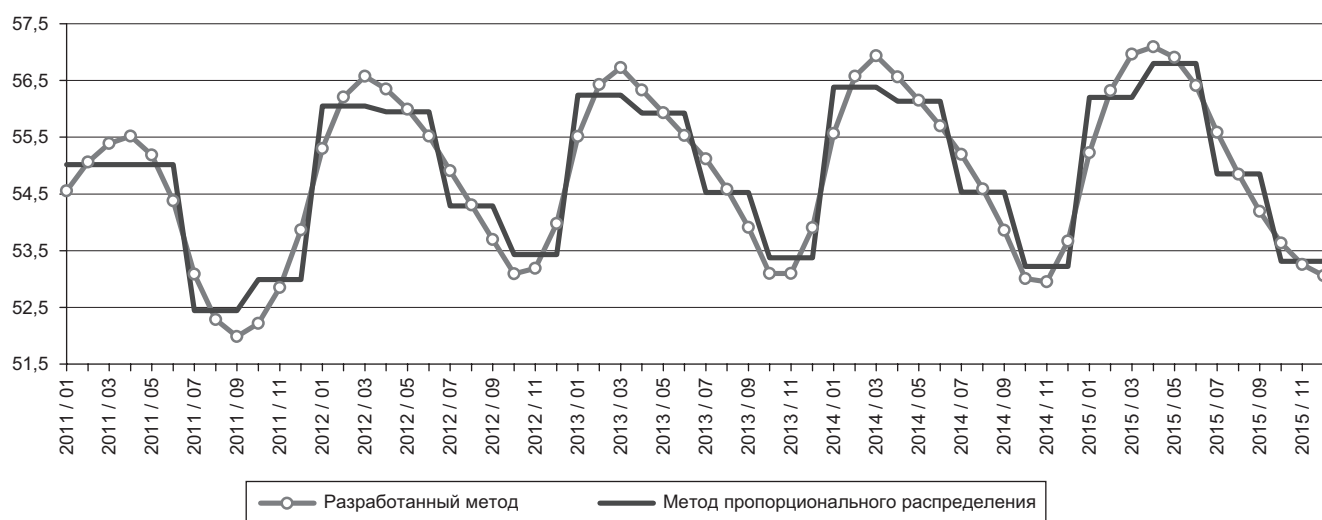


Рис. 3. Ряды месячной динамики мультипликативных поправок за 2011-2015 гг. (млрд рублей в ценах 2011 г. на 1% ИВБВЭД к декабрю 2010 г.)

Рис. 4 и 5 позволяют сопоставить результаты решения задачи темпорального дезагрегирования квартальной динамики валового внутреннего продукта по формуле (10) при последовательном выборе не только начального условия сохранения формы сезонного цикла, но и начального условия Шолета. Нетрудно видеть, что при использовании условия Шолета в начале периода наблюдений действительно (как это отмечалось выше) имеет место неестественное нарушение формы сезонного цикла динамического ряда мультипликативных поправок.



Рис. 4. Ряды месячной динамики мультипликативных поправок за 2011-2012 гг. (млрд рублей в ценах 2011 г. на 1% ИВБВЭД к декабрю 2010 г.)



Рис. 5. Ряды месячной динамики мультипликативных поправок за 7 месяцев 2011 г. (млрд рублей в ценах 2011 г. на 1% ИВБВЭД к декабрю 2010 г.)

Наконец, на рис. 6 представлены итоговые результаты расчетов месячной динамики валового

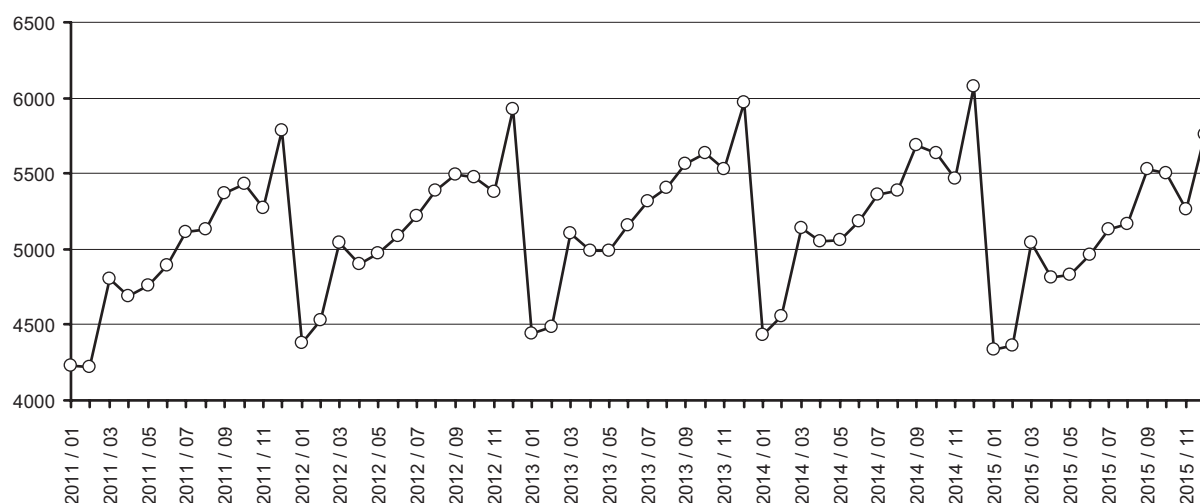


Рис. 6. Расчетный ряд месячной динамики валового внутреннего продукта на 2011-2015 гг. (млрд рублей в ценах 2011 г.)

**Заключительные комментарии.** Унифицированное аналитическое решение (10) задачи квадратичного программирования (5), (3) демонстрирует высокую степень операциональности и гибкости при решении задач темпорального дезагрегирования динамических рядов в статистической практике. Адаптивные свойства разработанного метода обеспечиваются, во-первых, использованием набора весовых коэффициентов относительной надежности высокочастотных наблюдений (значений показателя-индикатора) и, во-вторых, гибким выбором начальных условий темпорального дезагрегирования данных в рамках операциональной трактовки принципа сохранения движения в терминах первых конечных разностей.

внутреннего продукта в млрд рублей в ценах 2011 г. с использованием начального условия сохранения формы сезонного цикла и аналитического решения (13) на основе месячных данных Росстата о динамике индекса выпуска товаров и услуг по базовым видам экономической деятельности.

Сравнивая рис. 6 с рис. 2 и 1, можно получить вполне наглядное представление о привнесении формы сезонных циклов месячной динамики индекса выпуска товаров и услуг по базовым видам экономической деятельности (рис. 2) в квартальную динамику валового внутреннего продукта (рис. 1), что является общим характерным свойством методов темпорального дезагрегирования данных.

Особый практический интерес представляют возможности двухэтапной реализации метода в условиях регламентного пересмотра низкочастотных данных и/или поступления новых данных (низкочастотных и/или высокочастотных) с течением времени. В подобных случаях метод обеспечивает субоптимальную конкатенацию (относительно гладкое сопряжение) двух - «старой» и «новой» - частей расчетного динамического ряда мультипликативных поправок из (2) путем использования последней поправки из «старой» части в качестве начального условия для вычисления всех поправок, формирующих «новую» часть ряда.

Оптимальное решение (13) задачи квадратичного программирования (5), (3) при введенном

## Литература

начальном условии сохранения формы сезонного цикла, операциональное в условиях кратности календарного года шаговому подпериоду временного ряда значений показателя-индикатора, позволяет более точно отразить сезонные колебания динамического ряда мультипликативных поправок в начале периода наблюдений, что наглядно иллюстрируется рис. 4 и 5. Вместе с тем известным недостатком предложенного метода темпорального дезагрегирования является видимое нарушение формы сезонного цикла динамического ряда мультипликативных поправок в конце периода наблюдений, которое можно проследить в правой части рис. 3. Однако судя по графику на рис. 6, отмеченное нарушение не оказывает существенного влияния на расчетный ряд месячной динамики валового внутреннего продукта за 2011–2015 гг.

Вычислительная эффективность разработанного метода темпорального дезагрегирования данных весьма высока, поскольку его практическая реализация не требует обращения матриц порядка  $T = nK$  и ограничивается лишь обращением матриц порядка  $K$ , равного числу элементов в динамическом ряде значений дезагрегируемого показателя.

1. **Miller R.E., Blair P.D.** Input-Output analysis: Foundations and extensions: 2nd ed. N.Y.: Cambridge University Press, 2009. 782 p.
2. **Motorin V.** A generalization of initial conditions in benchmarking of economic time-series by additive and proportional Denton methods // *Iranian Economic Review*. 2015. Vol. 19. No. 3. P. 251–264.
3. **Dagum E.B., Cholette P.A.** Benchmarking, temporal distribution, and reconciliation methods for time series. Series: Lecture Notes in Statistics. Vol. 186. New York: Springer, 2006. 409 p.
4. **Блум Э.М., Диппелсман Р.Дж., Меле Н.Э.** Руководство по квартальным национальным счетам: концепции, источники данных и составление: пер. с англ. Вашингтон, округ Колумбия, США: МВФ, 2001. 222 с.
5. **Denton F.T.** Adjustment of monthly or quarterly series to annual totals: An approach based on quadratic minimization // *Journal of the American Statistical Association*. 1971. Vol. 66. No. 333. P. 99–102.
6. *Handbook on quarterly national accounts / European Commission, Eurostat; Cat. No. KS-GQ-13-004-EN-N. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2013. 312 p.*
7. **Моторин В.И.** Аналитические и вычислительные свойства пропорционального метода Дентона // *Вопросы статистики*. 2012. № 7. С. 66–72.
8. **Magnus J.R., Neudecker H.** Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics: 3rd ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2007. 450 p.

#### A METHOD FOR TEMPORAL DISAGGREGATION OF FLOW TIME-SERIES BASED ON HIGH-FREQUENCY INDICATOR DATA AND MOVEMENT PRESERVATION PRINCIPLE

*Vladimir I. Motorin*

*Author affiliation:* National Research University Higher School of Economics (Moscow, Russia). E-mail: motoriny@gmail.com.

The article presents a new method for transforming the low-frequency flow time-series into a consistent time-series with less step period according to given high-frequency indicator time-series. This method is founded on the framework of well-known movement preservation principle and the proportional first difference Denton method. The analytical solution for general problem of flow time-series temporal disaggregation is obtained in the form that demonstrates its linear dependency on an initial value of the instrumental disaggregation parameter. Some ways of incorporating the known Denton and Cholette initial condition to the analytical solution are considered. A notion of initial condition for preserving seasonal cycles in dynamics of multiplicative adjustments is proposed along with the certain way of its incorporation to analytical solution for general problem of flow time-series temporal disaggregation. The frontiers of idempotency and wide opportunities to formulate a recursive base for developed method are investigated. Special attention is paid to a sensitivity of the general problem's analytical solution to small changes in high-frequency and given low-frequency data.

Special techniques of applying the proposed method operationally are considered. The opportunities for two-stage implementation of the method are of great practical interest in the circumstances of the recent low-frequency data revisions and/or the new data arrivals. Computing efficiency of the developed tools for temporal disaggregation is quite high because associated calculations come to inversion of a square matrix of the order that equals a number of observations in low-frequency data set available.

The paper contains a row of illustrative diagrams that represent the results of experimental calculations with the official statistical data on quarterly gross domestic product and monthly output index for main kinds of economic activities in 2011–2015.

**Keywords:** flow time-series, temporal disaggregation, movement preservation principle, proportional Denton method, optimization problem, Lagrange multipliers.

**JEL:** C22, C61, C65.

## References

1. **Miller R.E., Blair P.D.** *Input-Output analysis: Foundations and extensions*: 2nd ed. N.Y.: Cambridge University Press, 2009. 782 p.
2. **Motorin V.** A generalization of initial conditions in benchmarking of economic time-series by additive and proportional Denton methods. *Iranian Economic Review*, 2015, vol. 19, no. 3, pp. 251-264.
3. **Dagum E.B., Cholette P.A.** *Benchmarking, temporal distribution, and reconciliation methods for time series*. Series: Lecture Notes in Statistics. Vol. 186. New York: Springer, 2006. 409 p.
4. **Bloem A.M., Dippelsman R.J., Maehle N.O.** *Quarterly national accounts manual: Concepts, data sources, and compilation*. Washington, D.C.: IMF, 2001. 210 p. (Rus. ed. Blum E.M., Dippelsman R.Dzh., Mele N.E. *Rukovodstvo po kvartal'nyim natsional'nyim schetam: kontseptsii, istochniki dannykh i sostavleniye*. Washington, D.C.: IMF, 2001. 222 p.).
5. **Denton F.T.** Adjustment of monthly or quarterly series to annual totals: An approach based on quadratic minimization. *Journal of the American Statistical Association*, 1971, vol. 66, no. 333, pp. 99-102.
6. *Handbook on quarterly national accounts*. European Commission, Eurostat; Cat. No. KS-GQ-13-004-EN-N. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2013. 312 p.
7. **Motorin V.I.** Analiticheskiye i vychislitelnyye svoystva proporsionalnogo metoda Dentona [Analytical and computational properties of the proportional Denton method]. *Voprosy statistiki*, 2012, no. 7, pp. 66-72. (In Russ.).
8. **Magnus J.R., Neudecker H.** *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*: 3rd ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2007. 450 p.

## ПОДПИСКА - 2016

**Продолжается подписка на журнал «Вопросы статистики» на 2-е полугодие 2016 г.**, которую можно оформить во всех отделениях почтовой связи ФГУП «Почта России» и в альтернативных предприятиях России, стран СНГ и Балтии по каталогу агентства Роспечать «Газеты. Журналы» (подписные индексы 70127, 71807) или по объединенному каталогу «Пресса России» (подписной индекс Т71807), а также через АНО ИИЦ «Статистика России».

**С 2003 г. выпускается электронная версия журнала.** Вы можете оформить годовую подписку на электронную версию журнала или заказать отдельные номера, отправив на адрес редакции письмо-заявку.

Контактный телефон: **+7 (495) 607 42 52**

E-mail: **shop@infostat.ru**

Сайт: **<http://www.infostat.ru>**

Адрес редакции: **107450 Москва, ул. Мясницкая, 39, стр. 1**