

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К УЛУЧШЕНИЮ ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПУТЕМ ОБЪЕДИНЕНИЯ ПРОГНОЗОВ*

А.А. Френкель,
А.А. Сурков

Авторами на основе ретроспективного анализа отечественных и зарубежных исследований по методологии социально-экономического прогнозирования ставятся проблемы повышения точности прогноза и предлагаются некоторые направления их решения. По их мнению, в связи с тем, что при построении прогнозов сложно отдать предпочтение какому-то одному методу прогнозирования, в настоящее время реальное решение задачи повышения его качества – реализация подхода, связанного с объединением прогнозов. Акцентируется внимание на технике объединения частных прогнозов, определении эффективности применения того или иного метода их объединения и оптимизации числа отобранных вариантов прогнозов для их объединения. Объединение прогнозов уже зарекомендовало себя на практике и не уступает по точности давно зарекомендовавшим себя частным методам прогнозирования. Основная идея объединения прогнозов – использование всей доступной прогнозируемой информации относительно различных методов прогнозирования, даже если отдельные методы сами по себе не приводят к достаточно качественным результатам.

В статье дана экспертная оценка отдельных методик определения весовых коэффициентов, являющегося ключевым моментом в процедуре объединения отдельных прогнозов. Последовательно характеризуются методы объединения прогнозов: 1) путем усреднения частных прогнозов; 2) с использованием метода наименьших квадратов (МНК); 3) предполагающего минимизацию дисперсии ошибки объединенного прогноза; 4) на основе ретроспективных прогнозов; 5) на основе факторного анализа; 6) с использованием метода попарных предпочтений; 7) на основе квадратичного программирования. При рассмотрении различных подходов к определению весовых коэффициентов указаны их преимущества и недостатки.

В заключении статьи приведены сводные таблицы, отражающие выводы – указание основных и наиболее часто используемых методов объединения прогнозов и краткие описания полученных результатов по данным методам, а также обширная библиография научных публикаций как отечественных, так и зарубежных авторов по рассматриваемому вопросу.

Ключевые слова: прогнозирование, построение модели прогноза, комбинированный прогноз, объединение прогнозов, весовые коэффициенты.

JEL: C53, E27.

Прогнозирование экономических процессов основывается на определенных подходах и методах, использование которых дает далеко не однозначные результаты. Опыт расчетов прогнозов экономических показателей свидетельствует, что основной проблемой при этом является выбор между полученными результатами по степени их точности. Обычно предпочтение отдается более точному прогнозу, полученному путем использования того или иного метода. В то же время каждый прогноз содержит полезную информацию, которая отсутствует в других прогнозах.

Такая информация имеет различную природу. Во-первых, каждый прогноз основан на информации, специальной для данного подхода, и поэтому не учитывается или учитывается незначительно в других методах прогнозирования. Во-вторых, каждый прогноз основан на определенной форме взаимосвязи меж-

ду переменными той или иной модели, отличной от связей, исследуемых в других моделях.

Но в то же время разработанные прогнозы часто имеют сходные статистические свойства, в результате чего трудно отдать предпочтение какому-либо из них. По всей видимости, прогнозы, полученные разными методами, описывают лишь одну сторону динамики данного экономического процесса, отображаемого исследуемым временным рядом. Поэтому объединение независимо полученных прогнозов позволяет привлекать дополнительную информацию, которая может способствовать более полному и точному описанию прогнозируемого процесса, и тем самым получить более точные прогнозы.

Стандартным примером может служить построение прогнозов с использованием моделей «кривых роста», основанных на пред-

Френкель Александр Адольфович (ie_901@inecon.ru) – д-р экон. наук, профессор, главный научный сотрудник Центра макроэкономического анализа и прогнозов ИЭ РАН.

Сурков Антон Александрович (surkoff@inbox.ru) – аспирант кафедры ЭЭММИ, ИАТЭ НИЯУ МИФИ.

* Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность выдающемуся отечественному ученому, лауреату Государственной премии СССР по экономике (1968 г.), д-ру экон. наук, профессору Э.Б. Ершову за сделанные серьезные замечания, учет большинства которых в значительной мере способствовал улучшению качества обзора.

положении инерционности динамики экономического показателя и многофакторной регрессионной модели, основанной на инерции взаимосвязей между показателями. Эти две модели базируются на разных предпосылках. Они учитывают различные стороны одного и того же экономического процесса, и их совместное применение приводит к использованию дополнительной информации, позволяющей дать более полное описание изменения во времени изучаемого показателя (Половников, 1983).

Объединение прогнозов связано с такими проблемами, как коррелированность прогнозов, полученных по различным моделям, наличие априорной информации об изменении исследуемых показателей, длина временного ряда, наличие аномальных наблюдений и т. п. Решение этих проблем требует применения специального подхода, а объединенный прогноз при грамотном анализе частных прогнозов может дать более точный результат, недостижимый при использовании отдельных частных прогнозов.

Поскольку разные частные прогнозы взаимно дополняют информацию об экономическом процессе, целесообразно использовать как итоговый прогноз средневзвешенное из частных прогнозных значений, полученных по отобраным моделям прогнозирования.

При выборе метода объединения прогнозов главным является вопрос о нахождении весовых коэффициентов, с которыми частные прогнозные значения будут объединяться в общем прогнозе. От того, какие методы метода построения весовых коэффициентов будут использованы, зависит уровень повышения точности прогнозирования.

На сами весовые коэффициенты накладываются только два ограничения: сумма всех весовых коэффициентов должна равняться единице, и весовые коэффициенты должны находиться в интервале $[0,1]$. Кроме того, при выборе методов построения весовых коэффициентов необходимо соблюдать ряд общих требований, способствующих повышению эффективности объединения прогнозов для получения более точных прогнозов.

Существует ряд методов определения весов, учитывающих зависимости между частными прогнозами и их относительной точностью путем присвоения больших весов тем ча-

стным прогнозам, которые имеют меньшие по величине среднестатистические ошибки. Эти методы должны удовлетворять следующим требованиям:

1) точность отдельных прогнозов не изменяется с течением времени;

2) прогнозы не содержат систематической ошибки.

В основополагающей статье по объединению прогнозов [21] сформулирован ряд основных требований, предъявляемых к выбору весов, которые учитываются и сейчас во многих исследованиях:

а) по мере увеличения числа прогнозов средняя величина весов должна приближаться к оптимальной величине при условии, что эффективность прогнозов остается неизменной;

б) при постоянном изменении достоверности одного из прогнозов веса должны достаточно быстро приспосабливаться к новым значениям;

в) величины весов должны незначительно колебаться вокруг оптимальной величины.

К сожалению, в этих формулировках не раскрываются понятия «оптимальная величина» и «эффективность прогнозов». Если под «эффективностью прогнозов», скорее всего, понимается их точность, то термин «оптимальная величина» может иметь различную интерпретацию.

Обычной формой для записи объединенного прогноза является линейная форма:

$$F = \sum_{i=1}^n w_i f_i, \quad (1)$$

где F - объединенный прогноз; f_i - i -й частный прогноз; w_i - весовой коэффициент, с которым i -й частный прогноз был включен в объединенный прогноз.

В обзоре рассматривается только линейная модель объединенных прогнозов. Линейная форма в настоящее время является самой распространенной формой при объединении прогнозов в силу своей простоты и удобства в использовании, хотя она и не является единственной. Кроме того, объединенный прогноз обычно не включает в себя постоянный коэффициент, исключение которого упрощает процедуру построения объединенного прогноза и позволяет объединенному прогнозу быть более гибким.

Для того чтобы не накапливать «белый шум», который вносится частными прогно-

зами в объединенный прогноз, необходимо ограничивать число отдельных прогнозов некоторым теоретическим пределом, до которого может повышаться точность прогноза, получаемого с помощью объединения. За этим пределом добавление новых компонентов не только не улучшит конечный результат, но может даже ухудшить его. То есть необходимо определить оптимальное число частных прогнозов, которые можно объединять одновременно.

Определение весовых коэффициентов для частных прогнозов и обоснование числа этих прогнозов при их объединении являются основными проблемами, которые далеки до их окончательного решения.

Работа [21] была первой работой по объединению прогнозов. С тех пор за последние 45 лет было опубликовано всего четыре обзора по проблемам объединения прогнозов, в которых анализируется и систематизируется несколько сотен статей: это работы [36], [26], [60] и [50]. В них рассматривается аннотированная библиография ряда статей, а также области знаний, где применяется объединение прогнозов. «Задачей обзоров является обеспечение литературой студентов и исследователей, а также оказание помощи исследователям в нахождении работ в конкретных областях, как теоретических, так и практических» [26]. В обзорах также рассматривается история вопроса и краткое содержание важнейших статей.

В этих работах авторы практически не рассматривали сравнительную эффективность различных методов объединения прогнозов. Они также не пытались обосновать преимущество того или иного метода нахождения весовых коэффициентов.

Поскольку прогнозы разрабатываются во всех областях знаний (экономика, метеорология, сельское хозяйство, космонавтика, технологии и т. д.), то повышение их точности является задачей номер один. При построении прогнозов используются стандартные пакеты статистических программ, в которых содержится несколько методов прогнозирования. Причем некоторые достаточно эффективные методы в этих пакетах отсутствуют. За рубежом, начиная с конца 60-х годов прошлого века, объединение прогнозов сформировалось в новое, бурно развивающееся направ-

ление в теории прогнозирования. К сожалению, отечественные ученые не уделяют ему должного внимания. Таким образом, в теории и практике прогнозирования в нашей стране образовался значительный пробел, который мы попытались заполнить [15]. Мы также попытались при рассмотрении различных подходов к получению весовых коэффициентов при объединении прогнозов выявить их преимущества и недостатки.

Данный обзор является логическим продолжением нашей работы. В нем рассмотрено значительно большее число используемых методов объединения прогнозов и сделаны уточнения в ранее описанных методах.

Он не претендует на сколько-нибудь полный охват работ по тематике объединения прогнозов. Но в нем делается попытка изложить наиболее существенные или, по крайней мере, наиболее распространенные идеи и методы построения весовых коэффициентов.

В подавляющем большинстве рассматриваемых работ по объединению прогнозов авторами не приводятся исходные данные, служащие для разработки предлагаемых методов. Также не разобраны и условия применения методов, взятых для сравнения. В связи с этим проверить сделанные в статьях выводы не всегда представляется возможным. Видимо, следует только надеяться на добросовестность авторов в обоснованности применения тех или иных методов построения частных прогнозов. Кроме того, в некоторых статьях даются названия методов, которые можно трактовать достаточно широко.

Все рассматриваемые методы разбиты на семь групп. Сначала описываются методы, основанные на среднем арифметическом частных прогнозов. Затем анализируются методы, основанные на использовании метода наименьших квадратов (МНК). Третья группа посвящена методикам, разработанным Granger с соавторами. В особую группу выделены методы получения весов, основанные на результатах ретроспективных прогнозов. В отдельные группы также выделяются методы, основанные на использовании факторного анализа, а также метода попарных предпочтений. В седьмую группу выделены методы, использующие алгоритм квадратичного программирования.

Методы объединения прогнозов, основанные на усреднении частных прогнозов. Еще в 1963 г. Barnard [20] при сравнении нескольких методов прогнозирования отметил, что среднее арифметическое двух прогнозов может превзойти по результатам каждого из включенных в среднее частных прогнозов. И по настоящее время простое среднее арифметическое нескольких прогнозов остается самым распространенным методом объединения прогнозов. Причем результаты даже такого объединения превосходят результаты отдельных частных прогнозов.

Bates and Granger в своей статье [21] первыми рассмотрели преимущество объединения прогнозов и попытались показать, что при среднем арифметическом нескольких частных прогнозов значительно повышается точность прогнозирования. Для иллюстрации этого они использовали объединение из двух прогнозов с равными весами. Bates and Granger привели пример с прогнозированием пассажирских перевозок по воздушным линиям по месячным данным за период 1951-1960 гг. Для прогнозирования были выбраны два метода: метод экспоненциального сглаживания Брауна и метод Бокса-Дженкинса.

Для сравнения эффективности взяли среднеквадратическую ошибку. В рассмотренном ими примере среднеквадратическая ошибка для этих двух методов прогнозирования и для объединенного прогноза составила: 177,7 - для метода Брауна, 148,6 - для метода Бокса-Дженкинса и 130,2 - для объединенного прогноза с равными весами.

В дальнейшем исследовании объединения прогнозов, в своей первой работе Makridakis and Winkler [46] провели так называемый «М-1 конкурс». Он заключался в исследовании 1001 временного ряда в различных областях знаний, начиная от демографических временных рядов и заканчивая среднегодовым уровнем ВВП. Также временные ряды различались по временным интервалам. Целью «М-1 конкурса» являлось исследование изменения точности объединенного прогноза с увеличением количества включаемых прогнозов в объединенный прогноз, а также определение степени повышения точности прогнозирования в результате проведенного объединения.

Критерием эффективности была абсолютная ошибка (MAPE), выраженная в процент-

ном отношении. Она рассчитывалась для каждой индивидуальной модели прогнозирования (по всему горизонту прогнозирования), а также для каждой возможной комбинации прогнозов. При этом сравнивались максимальная («Высокая MAPE»), средняя и минимальная («Низкая MAPE») абсолютные ошибки.

Для всех серий временных рядов анализировались результаты 14 методов прогнозирования¹, в том числе скользящее среднее, различные методы экспоненциального сглаживания Брауна, линейная регрессия, метод Бокса-Дженкинса и т. д.

Отдельные прогнозы включались в объединенный прогноз последовательно. Необходимо отметить (как один из итогов исследования), что оптимальное количество частных прогнозов в объединенном прогнозе не должно было превышать шести. В противном случае наблюдался противоположный результат: объединенный прогноз с большим числом частных прогнозов давал более низкую точность, чем некоторые частные прогнозы.

Авторы отметили, что объединение прогнозов уменьшает риск выбора недостаточно точного прогноза. Этот риск быстро уменьшается при рассмотрении среднего из нескольких частных прогнозов. Другими словами, выбор наиболее точного частного прогноза как итогового результата становится ненужным.

Анализ показал, что можно добиться повышения точности лучшего частного прогноза, объединив его с прогнозом, который дает не самые точные результаты. Так, например, при объединении пяти прогнозов даже самое большое значение MAPE объединенного прогноза (равное 21,3%) лучше, чем среднее значение MAPE отдельных прогнозов (равное 38,5%). Но как отмечают авторы, если наиболее точный прогноз известен заранее, то объединение его с любым другим прогнозом даст незначительное повышение точности.

В дальнейшем Makridakis в соавторстве с другими исследователями провели еще два «М-конкурса»: в 1993 г. (М2-конкурс) и в 2000 г. (М3-конкурс). В каждом исследовании количество временных рядов увеличивалось в два раза. Также было увеличено число частных прогнозов (так, в «М3-конкурсе» было рассмотрено 24 различных метода прогнозирования и 3003 временных ряда).

¹ Более подробно о причинах выбора именно этих методов и о построении прогнозных значений можно найти в работах [48] и [49].

Среднее арифметическое при объединении прогнозов используется наиболее часто. Однако ряд прогнозистов сходятся во мнении, что простое среднее арифметическое нечувствительно к аномальным прогнозам. Например, в своей работе Winkler and Clemen [61] рассчитывали среднее арифметическое от нескольких прогнозов и показали, как относительно небольшие ошибки в частных прогнозах могут привести к отрицательным весам или сумма весовых коэффициентов может оказаться гораздо больше, чем единица. Поэтому в ряде исследований предлагается использовать усеченное среднее с отсеиванием аномальных прогнозов.

Goodwin [34] в коротком обзоре по объединению прогнозов привел на тему выбора метода усеченного среднего достаточно простой пример. Он рассмотрел абстрактный пример пяти прогнозов продаж: 23, 34, 47, 53, 86 (среднее арифметическое – 48,6). Если мы решим убрать два «чужих» прогноза (наименьший и наибольший), то наша усеченная серия будет состоять из прогнозов – 34, 47, и 53 (то есть усеченное среднее 44,7). В противоположность этому, если мы заменим убранные прогнозы ближайшими прогнозами из нашей серии, то будем иметь серию, состоящую из 34, 34, 47, 53 и 53 (то есть усеченное среднее 44,2). Goodwin отметил, что усечение имеет смысл только в случае, если мы имеем минимум пять прогнозов.

Проблеме выбора оптимального усечения посвящена статья Jose and Winkler [41]. Авторы воспользовались результатами прогнозов из «МЗ-конкурса» Makridakis and Hibon [45] и прогнозами номинального валового внутреннего продукта (NGDP), разработанными Федеральным резервным банком Филадельфии [30]. В результате Jose and Winkler получили более высокую точность усеченного среднего по сравнению с простым средним арифметическим. Согласно полученным результатам, для значительного повышения точности прогноза достаточно внести усечение аномальных прогнозов в размере 5-7,5% с обеих сторон (со стороны максимальных и минимальных аномальных значений прогнозов).

Очевидно, что объединенный прогноз, в котором одинаковые веса придаются каждому из частных прогнозов, не вызывает трудностей в использовании. Но на практике обыч-

но стремятся придать больший вес тому набору прогнозов, который содержит меньшую по величине среднеквадратическую ошибку. Существует множество способов определения весов, среди которых выбирается тот, который обеспечивает наименьшие ошибки для объединенных прогнозов.

Среднее арифметическое из нескольких прогнозов не является единственным способом для объединения прогнозов.

Методы объединения прогнозов, основанные на использовании метода наименьших квадратов.

Вначале использования МНК при объединении прогнозов появилась идея объединения прогнозов с помощью регрессионных моделей [29, 65, 10]. Однако эта идея в дальнейшем не получила своего развития.

Первой относительно подробной работой по применению метода наименьших квадратов для построения объединенного прогноза явилась статья Granger and Ramanathan [37].

Авторы предложили три различных метода расчета весовых коэффициентов для объединения частных прогнозов. В своих расчетах, наряду с методом без ограничений, накладываемые на весовые коэффициенты объединенного прогноза, и без постоянных членов, они предложили вариант с использованием ограничений на весовые коэффициенты (сумма весовых коэффициентов равняется единицы), а также вариант с включением постоянного члена в форму объединенного прогноза. Необходимо отметить, что данные методы не учитывают фактор положительности весовых коэффициентов, хотя указанное условие является чрезвычайно важным. Рассмотрим подробнее эти три метода. Основная идея всех трех методов заключается в поиске таких весовых коэффициентов для частных прогнозов, что бы ошибка итогового объединенного прогноза была минимальной.

Сущность *первого метода* заключалась в следующем. Пусть $F\alpha$ является объединенным прогнозом, где α есть вектор весовых коэффициентов для объединяющихся частных прогнозов, а F является матрицей значений частных прогнозов. При этом варианте авторы не стали накладывать ограничения на сумму весовых коэффициентов. В таком случае, ошибка прогноза будет иметь вид: $e = x - F\alpha$, где x – вектор фактических значений прогнозируемо-

го показателя. Тогда необходимо определить α таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов ошибок прогнозов. То есть необходимо минимизировать выражение $(x - F\alpha)^T(x - F\alpha)$. Естественно, что минимальным значением данного выражения является ноль. При этом значение весового коэффициента определяется как:

$$\hat{\alpha} = (F^T F)^{-1} F^T x. \quad (2)$$

При таком расчете вектора весовых коэффициентов возникает проблема, заключающаяся в том, что при минимизации выражения $(x - F\alpha)^T(x - F\alpha)$ все равно для него не будет достигнуто нулевое значение. Но при этом данный вариант построения весовых коэффициентов позволяет выделить более точные частные прогнозы и придать им большие весовые коэффициенты.

Для оценки методов авторы использовали сумму квадратов остатков:

$$Q_A = x^T x - x^T F \alpha. \quad (3)$$

В данной работе также была использована сумма квадратичных ошибок для проверки точности объединенного прогноза.

Во *втором методе* было предложено ввести ограничение на сумму весовых коэффициентов: $l^T \beta = 1$, где l - единичный вектор, а β играет роль вектора весовых коэффициентов (условное обозначение для выделения коэффициентов второго метода, так как в данном методе задействованы и коэффициенты от первого метода).

В этом случае поиск весовых коэффициентов заключается в минимизации уже другого выражения: $\min(x - F\beta)^T(x - F\beta) + 2\lambda_B(l^T \beta - 1)$, где λ_B - множитель Лагранжа. Отсюда вектор весовых коэффициентов определяется как

$$\hat{\beta} = (F^T F)^{-1} F^T x - \lambda_B (F^T F)^{-1} l, \quad (4)$$

или же через первый метод:

$$\hat{\beta} = \hat{\alpha} - \lambda_B (F^T F)^{-1} l. \quad (5)$$

Третий метод также не рассматривает ограничение на весовые коэффициенты. Но в данном случае в объединенный прогноз вводится постоянный член, который необходим для проверки его вклада в значение среднеквадратической ошибки объединенного про-

гноза. Введение постоянного члена требует минимизации уже другого выражения:

$$\min(x - \delta_0 l - F\delta)^T(x - \delta_0 l - F\delta),$$

где δ_0 - постоянный член, а δ служит для обозначения вектора весовых коэффициентов.

Решение будет иметь вид:

$$\delta = \alpha - \delta_0 (F^T F)^{-1} F^T l; \quad (6)$$

$$\delta_0 = l^T e_A / (n - \theta); \quad (7)$$

$$\theta = l^T F (F^T F)^{-1} F^T l. \quad (8)$$

Вычисление квадратов остатков по всем трем методам показывает, что третий метод дает меньшую сумму квадратов остатков, чем два других метода. Авторы считают, что третий метод является объективным методом, даже если частные прогнозы будут предвзятыми.

Три предложенных метода Granger and Ramanathan применили на практике. Они анализировали прогнозы квартальных цен на свинину. Было разработано 24 прогноза в период с 1976 по 1981 г. Для их объединения рассматривались три метода: эконометрический метод (Econ.)², метод Бокса-Дженкинса (ARIMA) и прогнозирование на основе экспертных оценок (Expert). Методы объединялись как попарно между собой, так и сразу все три. Среднеквадратическое отклонение для частных прогнозов и объединенных прогнозов по всем трем методам прогнозирования представлено в таблице 1.

Таблица 1.

Ошибки частных прогнозов

Частные прогнозы	Среднеквадратическое отклонение
Econ.	610,4
ARIMA	420,7
Expert	522,7
Первый метод объединения	331,4
Второй метод объединения	334,7
Третий метод объединения	319,6

Источник: [28].

Из данных таблицы 1 видно, что прогнозы на основе ARIMA являются более точным из частных прогнозов, имея среднеквадратическое отклонение примерно на 20% меньше,

¹ Авторы не указывают, какой конкретно метод они подразумевают как эконометрический и на основе каких экспертных оценок делаются прогнозы. Но методы, используемые в статье, более подробно описаны в работе [22] на которую ссылаются Granger and Ramanathan, а также в дальнейшем в работе [51].

чем для прогнозирования на основе экспертных оценок.

Объединение сразу трех частных прогнозов лучше, чем любая комбинация пар частных прогнозов, хотя иногда эти улучшения и оказываются малы. Кроме того, третий метод лучше, с точки зрения среднеквадратичной ошибки, чем первый или второй, как и предполагали авторы работы. В связи с этим авторами предлагается использование неограниченной линейной комбинации для объединения прогнозов, включая постоянный коэффициент в уравнение объединения. Но интересно отметить, что первый метод, который является неограниченным в сумме для весовых коэффициентов, имеет сумму весов, примерно равную единице, но это не относится к третьему методу, где сумма весовых коэффициентов для прогнозов меньше единицы.

Clemen [25] развил идею Granger and Ramanathan [37] об ограничениях, накладываемых на весовые коэффициенты. Первое связано с отсутствием постоянного коэффициента в регрессии, а второе - с суммой весовых коэффициентов. Он рассмотрел четыре варианта комбинированного прогноза на основании методов, предложенных Granger and Ramanathan. Первый вариант предусматривал постоянный коэффициент для уравнения регрессии и отсутствие ограничений для весовых коэффициентов; во втором варианте постоянный коэффициент был равен нулю и без ограничений на сумму весовых коэффициентов; при третьем варианте - наличие постоянного коэффициента и сумма весовых коэффициентов равна единице и, наконец, четвертый вариант предусматривал оба ограничения.

Clemen рассмотрел прогнозы четырех компаний, опубликовавших свои ежеквартальные прогнозы ВВП на 1970-1982 гг. [Warton Econometrics (WE), Chase Econometrics (CE), Data Resources Inc. (DRI), Bureau of Economic Analysis (BEA)]. Для сравнения он использовал среднюю абсолютную ошибку и среднеквадратическую ошибку. Анализ прогнозов проходил по четырем временным горизонтам прогнозирования, для которых было определено различное количество прогнозов. Clemen для объединения использовал непосредственно метод наименьших квадратов. Изначально он указал, что МНК без ограничений имеет большую среднеквадратическую ошибку от-

носительно применения МНК с ограничениями на весовые коэффициенты и с нулевым постоянным коэффициентом уравнения регрессии.

Своим примером Clemen опроверг утверждение Granger and Ramanathan, что постоянный коэффициент может улучшить точность объединенного прогноза. Ненулевой постоянный коэффициент в объединенном прогнозе, наоборот, ухудшил точность прогнозирования по сравнению даже с частными прогнозами. При этом Clemen не отрицает объективность объединения прогнозов с использованием постоянного коэффициента. Результаты его примера показали, что при предположении объективности прогнозистов необходимо обязательно ограничить линейную комбинацию прогнозов. Если же прогнозисты «почти» объективны, то исследователь должен сделать выбор между точностью и объективностью объединенного прогноза и тем самым решить, накладывать ли ограничения на весовые коэффициенты в объединенном прогнозе. Из данной статьи становится ясна значимость накладываемых ограничений на весовые коэффициенты объединенного прогноза и как существен их вклад в точность такого прогноза.

В дальнейшем Trenkler and Liski [59] развили доказательства Clemen относительно постоянного коэффициента регрессии и ограничений на весовые коэффициенты. Они теоретически рассмотрели среднеквадратическую ошибку при использовании МНК с ограничениями и без них. Trenkler and Liski пришли к аналогичным результатам, что и Clemen, относительно отрицательного вклада в точности постоянного коэффициента в линейной комбинации прогнозов.

Методы объединения, основанные на минимизации дисперсии ошибки объединенного прогноза. Bates and Granger [21] предложили целый ряд методов для получения весовых коэффициентов при объединении двух прогнозов. Общая формула для такого объединения имеет следующий вид:

$$F = wf_1 + (1 - w)f_2, \quad (9)$$

где w - весовой коэффициент; f_1 и f_2 - частные прогнозы, а F - объединенный прогноз.

При этом более точному прогнозу придается больший весовой коэффициент. Суть их

предложения сводилась к минимизации дисперсии ошибки объединенного прогноза. Выбор весового коэффициента w необходимо произвести таким образом, чтобы ошибка объединенного прогноза была мала.

Дисперсия ошибки σ_0^2 для объединенного прогноза равна:

$$\sigma_0^2 = w^2 \sigma_1^2 + (1-w)^2 \sigma_2^2 + 2\rho w \sigma_1 (1-w) \sigma_2, \quad (10)$$

где w - вес, задаваемый первому прогнозу, ρ - коэффициент корреляции между ошибками в первом и во втором прогнозах, σ_1^2 - дисперсия ошибок для первого прогноза, σ_2^2 - дисперсия ошибок для второго прогноза.

Вес w выбирается таким образом, чтобы ошибки объединенных прогнозов были минимальными. Дифференцируя по w выражение для дисперсии ошибки для объединенного прогноза и приравнявая его к нулю, получаем, что минимальное значение этой дисперсии будет при:

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2}. \quad (11)$$

При таком значении w величина дисперсии ошибки объединенного прогноза не будет превышать меньшее из двух отдельных значений дисперсий ошибок.

Оптимальное значение w не может быть получено на начальном этапе объединения прогнозов, так как оно изменяется по мере накопления знаний об относительной эффективности двух частных прогнозов. Более того,

на первоначальной стадии еще не известны ни дисперсии ошибок частных прогнозов, ни коэффициенты корреляции между ними. Кроме того, качество частных прогнозов со временем может изменяться, что будет отражаться на весах в объединенном прогнозе.

Учитывая основные требования к весовым коэффициентам и невозможность определить оптимальное значение весов на начальных этапах объединения, Bates and Granger [21] представили пять различных вариантов нахождения весовых коэффициентов (см. таблицу 2). Эти варианты, предложенные для объединения двух частных прогнозов, могут быть расширены на неограниченное количество прогнозов.

Методы расчета весовых коэффициентов Bates and Granger, предложенные для объединения двух частных прогнозов, были применены на практике Newbold and Granger [53]. Авторы рассмотрели 80 различных временных рядов и при построении объединенного прогноза использовали три различных метода прогнозирования: метод Бокса-Дженкинса, метод Хольта - Винтерса и метод пошаговой регрессии.

Для сравнения эффективности своих методов авторы использовали сравнение объединенного прогноза с прогнозом на основе метода Бокса-Дженкинса, который на тот момент давал самые точные результаты. Они сравнили процентное количество объеди-

Таблица 2

Варианты расчета весов Bates and Granger [21] и Newbold and Granger [53]*

Вариант	Выражения для вычисления	Комментарий
1	$k_T = \frac{\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{2,t}^2}{\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{1,t}^2 + \sum_{t=T-v}^{T-1} e_{2,t}^2}$	Учитываются v последних абсолютных ошибок частных прогнозов $e_{i,t}$. Величина веса k_T меняется с течением времени. Изменяя величину v , можно влиять на качество полученных весов
2	$k_T = \alpha k_{T-1} + (1-\alpha) \frac{\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{2,t}^2}{\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{1,t}^2 + \sum_{t=T-v}^{T-1} e_{2,t}^2}$	В этом варианте, дополнительно к предыдущему, производится сглаживание весов методом экспоненциального сглаживания для обеспечения стабильности веса v , так как при его небольшом значении веса будут существенно колебаться
3	$k_T = \frac{\sum_{t=T-v}^{T-1} \beta^t e_{2,t}^2}{\sum_{t=T-v}^{T-1} \beta^t e_{1,t}^2 + \sum_{t=T-v}^{T-1} \beta^t e_{2,t}^2}$	Дисперсия ошибок частного прогноза оценивается не по v последним значениям, а по всем значениям с весом β . При $\beta > 1$ больший вес придается более последним ошибкам
4	$k_T = \frac{\sum_{t=T-v}^{T-1} \beta^t e_{2,t}^2 - \sum_{t=T-v}^{T-1} \beta^t e_{1,t} e_{2,t}}{\sum_{t=T-v}^{T-1} \beta^t e_{1,t}^2 + \sum_{t=T-v}^{T-1} \beta^t e_{2,t}^2}$	В этом варианте, дополнительно к предыдущему, учитывается корреляция между ошибками частных прогнозов
5	$k_T = \alpha k_{T-1} + (1-\alpha) \frac{ e_{2,T-1} }{ e_{1,T-1} + e_{2,T-1} }$	Данный вариант отличается от варианта 2 используемым показателем точности прогноза. Вместо дисперсии ошибки прогноза применяется модель абсолютной ошибки прогноза

* Таблица заимствована из статьи А.А. Васильева [6].

ненных прогнозов, в которых была наименьшая ошибка в точности по сравнению с точностью прогнозов, полученных методом Бокса-Дженкинса. Результаты сравнения для

пяти методов можно увидеть в таблице 3 (где v - число последних абсолютных ошибок частных прогнозов).

Таблица 3

Процент рядов, для которых объединение прогнозов превосходило по точности прогноз по модели Бокса-Дженкинса*

Вариант 1			Вариант 2		
v	%		v	Параметр экспоненциального сглаживания (α)	%
1	50,00		1	0,5	60,00
3	65,00		1	0,7	61,25
6	60,00		1	0,9	60,00
9	63,75		3	0,5	63,75
12	62,50		3	0,7	61,25
Вес для ошибок (β)	Вариант 3	Вариант 4	3	0,5	63,75
	%		3	0,7	61,25
1,00	61,25	48,75	3	0,9	61,25
1,50	65,00	47,50	6	0,5	62,5
2,00	63,75	47,50	6	0,7	61,25
2,50	63,75	48,70	6	0,9	60,00
Вариант 5			9	0,5	65,00
v	%		9	0,7	62,50
1	50,00		9	0,9	62,50
3	52,50		12	0,5	62,50
6	47,50		12	0,7	62,50
9	52,50		12	0,9	62,50
12	51,25				

* Варианты в данной таблице соответствуют вариантам из табл. 2.

Источник: [53].

Результаты показывают, что в большинстве случаев объединенные прогнозы, рассчитанные на основе методов, предложенных авторами, превосходят результаты прогнозирования на основе метода Бокса-Дженкинса практически в 60 и более процентах случаев. Newbold and Granger отметили, что несмотря на неоспоримую точность метода Бокса-Дженкинса, комбинированный прогноз с объединением его даже с методом пошаговой регрессии, может улучшить точность прогнозирования.

Э.Б. Ершов [10] в своей статье также предлагал одним из способов объединения прогнозов минимизировать дисперсию ошибки объединенного прогноза.

В дальнейшем методы, предложенные Bates and Granger, были проверены на основе временных рядов из «M1-конкурса» Winkler and Makridakis [62]. Их результаты подтвердили результаты Newbold and Granger, но уже с точки зрения средней абсолютной ошибки. Они рассмотрели временные ряды различной длины (годовые, квартальные и месячные), а также 14 различных методов прогнозирования для объединения (в зависимости от значений параметров, которые входят в выражения для

вычислений весовых коэффициентов). Они сравнили результаты средних абсолютных ошибок по пяти методам Newbold and Granger с результатами ошибок среднего арифметического из частных прогнозов. Результаты показали, что в большинстве случаев методы Newbold and Granger превосходят среднее арифметическое с точки зрения средней абсолютной ошибки.

Кроме рассмотренных методов Bates and Granger, минимизацию дисперсии объединенного прогноза использовала и Балтрушевич [1]. Она при оценке эффективности вариантов решений, связанных с созданием и внедрением гибких производственных систем (ГПС), подчеркивала значимость точности прогноза оценок для принимаемого решения. Для своих целей она также обратилась к объединению прогнозов.

В ее работе был предложен подход, основанный на аддитивной свертке результатов частных прогнозов, полученных по различным моделям и методам. Суть ее подхода заключается в сведении минимизации суммарной дисперсии объединенного прогноза к решению обычной задачи на условный экстремум. Причем исходная модель основана на мини-

мизации суммарной дисперсии объединенного прогноза, а ограничением является ограничение на сумму весовых коэффициентов объединенного прогноза.

Методы, основанные на ретроспективных прогнозах. Одним из возможных способов комбинирования моделей для получения более точных прогнозов может являться метод AFTER (Aggregated Forecast through Exponential Reweighting), предложенный Yang [63] и Zou and Yang [66]. Yang выделяет несколько способов задания весов при объединении прогнозов в зависимости от того, известны ли условные дисперсии (что бывает крайне редко), или же существуют оценки условных дисперсий, или же дисперсии не используются вовсе. Он указывает, что методы прогнозирования могут быть изменчивыми во времени и предлагаемый метод может уменьшить эту изменчивость и тем самым увеличить точность прогнозирования.

Суть метода AFTER - в построении весовых коэффициентов, которые базируются на прошлых своих значениях, на значении условной дисперсии и на прошлых значениях частных прогнозов. Весовые коэффициенты обновляются после каждого нового наблюдения. Данный метод, однако, обладает несколькими недостатками: сложность применения и сильная зависимость получаемых весов от первого задаваемого значения.

Кроме того, Yang [64] также предложил схожий с методом AFTER метод ARM (Adaptive Regression by Mixing) для объединения нескольких регрессионных моделей в одну общую. Метод базируется на тех же самых процедурах и условиях, что и метод AFTER.

Вызывает интерес метод, предложенный Bunn [23]. Он рассматривает объединенный прогноз в линейной форме. Суть предлагаемого метода заключается в нахождении функции распределения для весового коэффициента k через бета-распределение. Тогда k в общем виде для неограниченного числа прогнозов рассчитывается следующим образом:

$$k_{i,j} = \frac{a_1 + s_{i,j}}{\sum_{j=1}^n a_j + j}, \quad (12)$$

где j - номер серии частных прогнозов, $j = 0, 1, \dots, i$ - номер модели; a_i - положительные константы; $s_{i,j}$ обозначает, в скольких случаях из j прогнозов метод i превосходил остальные.

Например, для случая с двумя частными прогнозами, если первый прогноз менее точен, чем второй, то s равно нулю; если наоборот, второй точнее первого, то s равно единице. Положительные константы a_i выбираются исходя из бета-распределения для $k_{i,j}$: $B(k_i | a_i, \bar{a}_i)$, где $\bar{a}_i = \sum_{j \neq i} a_j$, и являются начальными условиями. Таким образом, весовые коэффициенты пересчитываются при каждом объединении в зависимости от значений прошлых частных прогнозов, которые были включены в объединение.

Bunn провел проверку предлагаемого метода через объединение двух прогнозов суммарного индекса расхода газо-, электро- и водоснабжения в период с 1950 по 1965 г. Результаты его объединенного прогноза представлены в таблице 4. Во второй графе даны индексы (при 1958 г. = 100) в соответствии с данными, опубликованными в журнале «Национальный доход и расход» за 1966 г. Для примера Bunn предложил два варианта значений констант a_1 и a_2 . Такой подход к объединению приводит к корректировке значений с учетом прошлой точности и при правильном подходе к определению начальных констант можно добиться существенного улучшения в точности объединенного прогноза.

Из данных таблицы 4 видно, что объединенный прогноз по предлагаемому методу не уступает по точности и даже может быть точнее, чем частные прогнозы. Сам Bunn считал, что данный подход является надежным непараметрическим методом нахождения весовых коэффициентов с понятным для не прогнозиста смыслом. Этот метод, по мнению автора, хорошо работает, когда временной ряд, по которому разрабатывается прогноз, является коротким или же когда лицо, принимающее решение, хочет включить в объединенный прогноз экспертную информацию. Кроме того, объединенный прогноз по данному методу подстраивает весовые коэффициенты под изменения точности частных прогнозов.

Одна из проблем, по мнению Bunn, связанная с этим простым методом, состоит в том, что то подмножество прогнозов, которое однажды оказалось превзойденным, может не претерпевать больше никаких изменений, независимо от того, в какой степени его можно считать превосходящим относительно дру-

Таблица 4

Результаты объединения Вупп

Год	Реальные данные	Первый прогноз	Второй прогноз	B(k a ₁ =1, a ₂ =1)		B(k a ₁ =5, a ₂ =50)	
				k	Объединенный прогноз	k	Объединенный прогноз
1950	67	66,0	66,3	0,50	66,15	0,09	66,27
1951	72	71,3	71,9	0,33	71,70	0,08	71,85
1952	74	76,5	77,4	0,25	77,18	0,08	77,32
1953	77	79,2	80,3	0,40	79,86	0,12	80,19
1954	84	81,9	83,2	0,50	82,55	0,15	83,05
1955	88	89,0	88,6	0,43	88,77	0,14	88,65
1956	92	91,6	93,7	0,38	92,90	0,14	93,46
1957	96	96,0	98,5	0,45	97,37	0,16	98,18
1958	100	100,2	103,2	0,50	101,70	0,20	102,77
1959	103	104,3	107,8	0,55	105,87	0,22	107,25
1960	110	108,1	112,1	0,59	109,74	0,24	111,42
1961	116	112,9	117,4	0,62	114,61	0,26	116,58
1962	125	118,0	123,3	0,57	120,28	0,26	122,35
1963	133	124,2	130,2	0,53	127,02	0,25	129,14
1964	137	130,9	137,8	0,50	134,35	0,24	136,60
1965	145	137,0	145,0	0,47	141,24	0,24	143,63
Среднеквадратическая ошибка		16,4	5,3	7,3		5,1	

Источник: [23].

гих подмножеств. Пытаясь учесть полное линейное упорядочивание моделей по точности в другой своей статье, Вупп [24] предлагает рассмотреть применение матричного бета-распределения, которое приводит к увеличению точности предлагаемого метода.

К ретроспективным методам построения весовых коэффициентов так же можно отнести адаптивный метод, предложенный у Лукашина [12] и так же описанный в работе Дубровой [9].

Метод основывается на экспоненциальном сглаживании квадратов ошибок частных прогнозов:

$$S_t^i = (1 - \alpha)S_{t-1}^i + \alpha(e_t^i)^2 \quad (13)$$

где S_t^i - экспоненциально сглаженный квадрат ошибок, полученных по i -й модели ($i = 1, 2, \dots, m$), $\alpha = \text{const}$ - параметр адаптации ($0 < \alpha < 1$), $(e_t^i)^2$ - квадрат ошибки, полученной при прогнозировании по i -й модели в момент времени t .

Экспоненциальное сглаживание позволяет в большей степени учитывать точность и весомость прогнозных результатов, полученных на последних шагах прогнозирования, и учитывать изменение в динамике прогнозирования.

В таком случае весовые коэффициенты для частных прогнозов вычисляются на один

прогнозный период вперед с помощью выражения:

$$w_i(t) = \frac{P_t}{S_t^i}, \quad (14)$$

где $w_i(t)$ - весовые коэффициенты объединенного прогноза, а выражение для P_t определяется с учетом значения m - числа частных прогнозов.

Так, для трех частных моделей выражение для P_t имеет вид:

$$P_t = \frac{S_t^1 S_t^2 S_t^3}{S_t^1 S_t^2 + S_t^1 S_t^3 + S_t^2 S_t^3}, \quad (15)$$

где S_t^i - экспоненциально сглаженный квадрат ошибок, полученных по i -й модели ($i = 1, 2, \dots, m$).

Дуброва [9] проиллюстрировала данный метод на примере прогнозирования динамики жилищного строительства в ЦФО России.

Базовый набор частных прогнозных моделей составили адаптивные модели, учитывающие мультипликативную сезонность и различный характер тренда. Применение объединения прогнозов с представленным методом адаптивного построения весовых коэффициентов при прогнозировании объемов ввода в действие жилых домов в ЦФО позволило получить среднюю относительную ошибку по модулю менее 7,0%, что меньше, чем аналогичные значения для частных моделей прогнозирования.

Методы на основе факторного анализа. Метод на основе факторного анализа для объединения прогнозов был предложен Гореликом и Френкелем [8], и Френкелем [14].

Идея применения факторного анализа для построения комбинированного прогноза основана на том, что частные результаты прогноза, полученные по i -му методу прогнозирования, являются внешним выражением некоторой реально существующей, но непосредственно неизмеримой прогнозной величины. Она и принимается в качестве объединенного прогноза.

Объединенный прогноз находится из следующего выражения:

$$F = \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{f}_i + \sum_{i=1}^n \hat{\gamma}_i (f_i - \bar{f}_i), \quad (16)$$

где $\gamma_i = \frac{\hat{a}_i}{\sum_{i=1}^n |\hat{a}_i|}$, $\hat{\gamma}_i = \frac{\hat{a}_i^2}{\sum_{i=1}^n \hat{a}_i^2}$, $\bar{f}_i$ - частные прогнозы, а коэффициенты $\hat{a}_i$ находятся по методу Томпсона через коэффициенты корреляции частных прогнозов f_i .

Коэффициент $\hat{\gamma}_i$ во втором слагаемом пропорционален коэффициентам $\hat{a}_i$. При этом сумма квадратов $\hat{a}_i$ равна единице, то есть второе слагаемое является нормальной линейной комбинацией центрированных величин $(x_i - \bar{x}_i)$.

Таким образом, комбинированный прогноз F получается путем поворота частных прогнозов вокруг точки $(x_i - \bar{x}_i)$, то есть путем ортогонального преобразования центрированных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. При этом угол поворота выбирается таким образом, чтобы минимизировать норму внедиагональной части остаточной корреляционной матрицы частных прогнозов.

Френкель [14] привел численный пример при объединении прогнозов выработки цемента на одного работающего на период 1985-1990 гг. В качестве объединяющихся прогнозов были взяты прогнозы, построенные по методам гармонических весов, адаптивного экспоненциального сглаживания с использованием трекинг-сигнала, Бокса-Дженкинса и адаптивной фильтрации.

Сравнение результатов комбинированного прогноза с прогнозами, полученными различными методами, показало, что все методы дают чрезвычайно высокую точность. Однако с ростом периода упреждения точность отдельных методов будет падать, и предпоч-

тение все-таки следует отдать объединенному прогнозу.

Метод попарных предпочтений. Gupta and Wilton [38] описали матрицу попарных предпочтений как инструмент для нахождения оптимальных весовых коэффициентов для объединенного прогноза.

Суть метода заключается в следующем. Предположим, что «истинные» веса задаются вектором $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ - теоретически лучший вес, присвоенный i -му частному показателю. Тогда вероятность того, что частный показатель i «предпочтительнее» (дисперсия меньше) частного показателя j , должна вычисляться по формуле α_i/α_j . Матрица «попарных предпочтений» среди частных показателей может быть построена следующим образом: $O = (o_{ij})_{n \times n}$, где $o_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$. Таким образом, матрица O имеет вид:

$$O = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_1} & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & \dots & \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} & \frac{\alpha_2}{\alpha_2} & \dots & \frac{\alpha_2}{\alpha_n} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\alpha_n}{\alpha_1} & \frac{\alpha_n}{\alpha_2} & \dots & \frac{\alpha_n}{\alpha_n} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Каждая запись o_{ij} может быть интерпретирована как вероятность предпочтения частного показателя i показателю j . Заметим, что каждый элемент матрицы положителен и что $o_{ij} = 1/o_{ji}$, а диагональные элементы равны единице. Следовательно, $O\alpha = n\alpha$. Зная матрицу O , вектор весов α обеспечивается в соответствии с решением $(O - nE)\alpha = 0$, где E - единичная матрица. Так как матрица O имеет единичный ранг и ее след равен n , то лишь одно из собственных значений не равно нулю, и оно равняется n . Таким образом, данная матрица «попарных предпочтений» совместима и ее всегда можно решить относительно α .

Конечно, матрица O должна быть сначала оценена. Преимуществом данного метода является то, что оценка матрицы может быть произведена различными способами в зависимости от целей исследования. Например, она может быть оценена экспертом.

Или по минимальному отклонению от средней. Это может быть выполнено следующим образом:

Пусть число b_{ij} - число случаев, когда частный показатель i «лучше» показателя j (в данном случае имеет меньшее абсолютное отклонение от своего среднего значения), а b_{ji} - соответственно, когда частный показатель j предпочтительнее показателя i . Тогда оценка элемента матрицы O : $o_{ij} = b_{ij}/b_{ji}$.

Зная матрицу «попарных предпочтений» $\hat{O}$, находим ее собственный вектор, соответствующий максимальному положительному собственному значению. Нормализуя собственный вектор, получаем оценку искомого вектора весовых коэффициентов $\hat{\alpha}$.

Практическую реализацию метода попарных предпочтений можно найти в работе Френкеля, Райской, Бурцевой, Суркова [16]. Авторы рассматривали временной ряд инвестиций в основной капитал России за период с 1972 по 2013 г., используя несколько методов прогнозирования, каждый из которых давал разный результат по степени точности. Применяемые для прогнозирования методы были следующие: метод адаптивного экспоненциального сглаживания с использованием трэкинг-сигнала (MAEKS), метод обычного экспоненциального сглаживания (MEKS), метод гармонических весов (MGV) и модель ARIMA (1, 1, 1). Прогноз делался на период 2014-2017 гг. Для проверки точности прогноза использовалась относительная ошибка прогнозирования.

Объединенный прогноз показал наилучшие результаты относительно точности. Близко к нему по точности был прогноз, построенный методом экспоненциального сглаживания.

Метод «попарных предпочтений» обладает рядом несомненных достоинств по сравнению с другими методами. Во-первых, он значительно упрощает процедуру обработки информации. Нахождение весов не требует оценки большого количества данных. Во-вторых, метод «попарных предпочтений» позволяет дифференцировать влияние частных прогнозов на объединенный. Следует отметить и адаптивность метода, то есть возможность корректировки весовых коэффициентов по мере поступления новой информации. Наконец, метод позволяет легко включать экспертную информацию.

Методы на основе квадратичного программирования. Одним из подходов к нахождению весовых коэффициентов для объединения прогнозов является метод квадратичного программирования. Бейлинсон и Мотова [2] описали построение весовых коэффициентов через минимизацию ретроспективных относительных ошибок частных прогнозов. Они составили задачу, эквивалентную задаче метода наименьших квадратов с ограничениями типа уравнений и неравенств одновременно:

$$\begin{aligned} (Hw; Hw) &= \min \\ (w; e) &= 1 \\ 0 &\leq w \leq e \end{aligned} \quad (18)$$

где w - вектор весовых коэффициентов для объединенного прогноза; e - единичный вектор; H - матрица ретроспективных относительных ошибок прогнозирования.

Такая задача, по мнению авторов, должна решаться специальными методами квадратичного программирования.

Являясь простым и надежным методом объединения частных прогнозов, подход, предложенный Бейлинсоном и Мотовой, требует предварительного отбора прогностических моделей с целью соблюдения независимости ошибок. При этом независимость ошибок является основным условием для применения метода.

Кроме того, практика показала, что метод теряет в эффективности при сильно разнящихся дисперсиях ошибок частных прогнозов.

Предложенная система может иметь несколько результирующих векторов w , которые будут минимизировать ошибки прогнозирования. Для решения этой проблемы Бейлинсон и Мотова предлагают задать некоторое начальное приближение для вектора весовых коэффициентов, которое исходило бы из желаемых результатов и предположений о свойствах частных прогнозов. И на основе полученных векторов весовых коэффициентов выбирать наиболее подходящий вектор к начальному приближению.

Таким образом, предлагаемый метод сводится к виду:

$$\begin{aligned} \langle Hw; Hw \rangle &= \langle \mu; S^T S \mu \rangle = \min \\ (\mu; w_0) &= 1 \\ \|\mu - e\|^2 &= \min, \end{aligned} \quad (19)$$

где S - нормированная матрица ретроспективных относительных ошибок прогнозирования; μ - вектор, состоящий из

положительных элементов, близких к единице; w_0 - вектор начального приближения для весовых коэффициентов; e - единичный вектор.

Выбор в качестве решения вектора $w_{opt} = w_0 \mu$ означает, что при объединении достигается компромисс между априорным пренебрежением информацией о ковариациях ошибок частных прогнозов и их полным учетом.

Остапук и Мотова [13] проиллюстрировали представленный метод на примере расчета прогноза величины средней заработной платы в сфере науки. Информация по данному показателю представлялась ежемесячной динамикой за период 1993-2004 гг. Объединение производилось по пяти различным частным моделям прогнозирования. Часть результатов представлена в таблице 5. Из данных таблицы 5 видно, что объединенный прогноз превзошел все частные прогнозы относительно средней квадратической и средней абсолютной ошибок.

Таблица 5

Характеристики точности прогнозов величины средней заработной платы, полученные при расчете по различным моделям

Ошибка	Линейный тренд	Линейный тренд с сезонной составляющей	Объединенный прогноз
Средняя абсолютная ошибка	6,0	3,5	1,3
Средняя квадратическая ошибка	10,7	5,6	1,6

Источник: [13]

Заключение. При построении прогнозов часто крайне сложно отдать предпочтение какому-либо одному из методов прогнозирования. Объединение прогнозов позволяет решить эту проблему. Более того, объединенный прогноз дает возможность использовать почти всю информацию о частных прогнозах. Во многом это приводит к повышению точности прогнозирования. Однако до сих пор остаются открытыми вопросы: какова техника объединения прогнозов; как определить эффективность применения того или иного метода объединения; как найти оптимальное число частных прогнозов для их объединения. Эти задачи до сих пор не решены. И похоже, решать их никто не собирается.

Armstrong [19] дал рекомендации, которые должны помочь начинающему прогнозисту правильно использовать процедуру объединения прогнозов. Одной из этих рекомендаций было предложение применять как можно более простые методы построения весовых коэффициентов. В частности, Armstrong считает, что лучше использовать среднее арифметическое, если у прогнозиста нет какой-либо дополнительной информации по индивидуальным прогнозам и он не может выделить по точности более лучший частный прогноз.

Но вместе с этим Armstrong советует, что если есть доказательства, что тот или иной метод прогнозирования более точен по сравнению с остальными, то данному методу стоит придать больший вес в объединенном прогнозе.

Объединение прогнозов зарекомендовало себя как подход, который наиболее полезен в следующих ситуациях [19]:

- имеется неопределенность в выборе наиболее точного метода прогнозирования;
- имеется неопределенность, связанная с ситуацией прогнозирования;
- необходимо избежать больших субъективных ошибок прогнозирования.

По сравнению с частными прогнозами объединение прогнозов не может быть хуже, чем частные прогнозы, входящие в его состав.

Одной из важнейших проблем объединения прогнозов является выбор методики определения весовых коэффициентов. В настоящий момент существует множество методов построения весовых коэффициентов. Это и методы на основе ретроспективы, и методы на основе факторного анализа, и методы на основе нечетких множеств. В данном обзоре рассмотрена часть методов построения весовых коэффициентов, которые в настоящее время достаточно широко используются. При этом в обзоре были затронуты и проблемы, связанные с использованием различных методов объединения прогнозов.

Рассмотренные в обзоре методы объединения прогнозов были сведены в таблицу (см. таблицу 6).

До сих пор нет точного ответа, какой из предлагаемых методов построения весовых коэффициентов дает большую точность для

Методы объединения прогнозов

Метод	Основные результаты	Литература	Применение
<i>Методы на основе среднего арифметического</i>			
Взвешенная средняя	Практика показала, что обычная средняя нескольких прогнозов не хуже, чем частные прогнозы по точности, а в более чем 60% даже точнее. Но средняя арифметическая не учитывает возможные аномальные прогнозы. На его основе было определено, что наиболее эффективно использовать пять-шесть частных прогнозов для объединения	Bates and Granger [21] Makridakis and Winkler [46] Winkler and Clemen [66] Makridakis and Hibon [45]	Средняя арифметическая была использована для различных методов прогнозирования и различного числа частных прогнозов. Определение оптимального количества частных прогнозов для последующего их объединения
Усеченная средняя	Усечение в 5-7% случаев может увеличить точность прогнозирования по сравнению со средней арифметической в 50% случаев	Jose and Winkler [41] Goodwin [34] Winkler and Clemen [61]	Представление вариантов с усечениями наибольших и наименьших прогнозных значений. Выявление неэффективности простой средней арифметической
<i>Методы на основе МНК</i>			
Методы Granger и Ramanathan	Представление вариантов с вводом ограничений на сумму весовых коэффициентов и комбинацию с использованием постоянного коэффициента. Результатом стало доказательство оправданности вводимых ограничений на веса и неэффективность включения постоянного коэффициента	Granger and Ramanathan [37] Clemen [25] Trenkler and Liski [59]	Определение преимущества в точности прогнозирования предложенных методов по сравнению со средним арифметическим частных прогнозов. Характеристика ограничений для весовых коэффициентов
Метод Ершова	Альтернативные гипотезы построения комбинированного прогноза с использованием регрессионных моделей. Независимое подтверждение увеличения точности прогнозирования через объединение прогнозов.	Ершов [10]	Теоретическое обоснование метода. Сравнительный анализ различных подходов к объединению прогнозов. Формулировка предпосылок для практического применения методов.
<i>Минимизация дисперсии ошибок</i>			
Пять различных методов	Предлагаемые методы показали, что объединение прогнозов может значительно превосходить самые точные частные прогнозы. Но для этого необходимо подобрать оптимальные значения весовых коэффициентов. Представлены результаты по эффективности объединения прогнозов	Bates and Granger [21] Newbold and Granger [53] Makridakis and Winkler [46]	Сравнение объединенного прогноза с методами Хольта-Винтерса и Бокса-Дженкинса, определение их преимуществ по сравнению с данными методами. Подбор оптимальных коэффициентов для методов. Выработка общих правил для прогнозирования одномерных рядов
Аддитивная свертка	Определение весовых коэффициентов объединенного прогноза через оценку значений дисперсий частных прогнозов. Сведение нахождения весовых коэффициентов к задаче на условный экстремум	Балтрушевич [1]	Применение объединенного прогноза при оценке эффективности гибких производственных систем

Метод	Основные результаты	Литература	Применение
<i>Методы на основе ретроспективы</i>			
AFTER	Выделение нескольких способов задания весов при комбинировании прогнозов в зависимости от того, известна ли условная дисперсия временного ряда, или оценка дисперсии, или же дисперсия вообще не учитывается	Yang [63, 64] Zou and Yang [66]	Сравнение метода с экспертными оценками для определения уровня увеличения точности предлагаемого метода
Метод Bunn	Представление ретроспективного метода на основе сравнения точности прогнозов на предыдущем этапе прогнозирования. Нахождение весовых коэффициентов через бета-распределение	Bunn [23] Bunn [24]	Определение большей точности прогнозирования для предлагаемого метода объединения прогнозов. Попытка добавить экспертную информацию в объединенный прогноз
Адаптивный метод	Использование экспоненциального сглаживания для построения весовых коэффициентов. Использование последних значений прогноза для адаптации объединения к изменениям прогнозной ситуации	Лукашин [12] Дуброва [9]	Использование метода для практических целей. Определение эффективности объединения прогнозов с использованием данного метода построения весовых коэффициентов в краткосрочной перспективе
<i>Методы с применением факторного анализа</i>			
Метод Горелика и Френкеля	Использование инструментария факторного анализа для построения комбинированного прогноза. Сравнительный анализ существующих методов объединения прогнозов	Горелик и Френкель [8] Френкель [14]	Сравнение предложенного метода с несколькими частными прогнозами на основе прогнозирования производительности труда в цементной промышленности
<i>Метод попарных предпочтений</i>			
Метод Gupta and Wilton	Для определения весовых коэффициентов на основе матрицы, элементы которой являются отношением вероятностей того, что один прогноз будет лучше в плане значения дисперсии. Метод показал хорошие результаты в точности для прогнозов с короткими временными рядами и позволяет использовать в объединенном прогнозе экспертную информацию	Gupta and Wilton [38] Gupta and Wilton [39]	Сравнение метода со средним арифметическим и некоторыми другими методами объединения прогнозов
<i>Методы на основе квадратичного программирования</i>			
Метод Бейлинсон и Мотовой	Построение весовых коэффициентов объединенного прогноза через минимизацию ретроспективных относительных ошибок частных прогнозов. Совместно с ограничениями на весовые коэффициенты метод сводится к задаче квадратичного программирования	Бейлинсон и Мотова [2] Остапюк и Мотова [13]	Применение метода для практических целей. Сравнение объединенного прогноза с частными прогнозами. Выявление уменьшения средней абсолютной и средней относительной ошибок для объединенного прогноза

объединенного прогноза. Поэтому прогнозирующему необходимо уже в конкретной ситуации, располагая определенными данными о сущности экономических процессов, выбирать подходящий для него метод построения весовых коэффициентов.

Литература

1. Балтрушевич Т.Г. Модели и методы оценки эффективности гибких производственных систем // Автореф. дис. ...канд. экон. наук. М., 1991. С. 17 - 20.
2. Бейлинсон Я.Е., Мотова М.А. Комбинированные модели прогноза // Экспресс-информация. Серия: Модели-

рование социально-экономических процессов. М., 1990. Вып. 2. С. 110-121.

3. Васильев А.А. Гибридные модели прогноза экономических показателей на основе взвешенного арифметического среднего простого набора прогнозов // Вестник ТвГУ. Серия «Экономика и управление». 2012. № 13. С. 149 - 165.

4. Васильев А.А. Объединение прогнозов на основе усеченных и винзорированных средних // Вестник ТвГУ. Серия «Экономика и управление». 2014. № 2. С. 204 - 215.

5. Васильев А.А. Объединение прогнозов на основе оценки Ходжеса-Лемана и ее модификациях // Вестник ТвГУ. Серия «Экономика и управление». 2014. № 4. С. 201- 215.

6. **Васильев А.А.** Генезис гибридных моделей прогнозирования на основе объединения прогнозов // Вестник ТвГУ. Серия «Экономика и управление». 2014. № 23. С. 316 - 331.
7. **Головченко В. Б., Носков С. И.** Комбинирование прогнозов с учетом экспертной информации // Автоматика и телемеханика. 1992. № 11. С. 109 - 117.
8. **Горелик Н.А., Френкель А.А.** Статистические проблемы экономического прогнозирования // В кн.: Статистические методы анализа экономической динамики. Уч. зап. по статистике. М.: Наука, 1983. Т. 46. С. 9-48.
9. **Дуброва Т.А.** Статистический анализ и прогнозирование экономической динамики: проблемы и подходы // В кн.: Методология статистического исследования социально-экономических процессов. М.: Юнити, 2012. С. 129-138.
10. **Ершов Э.Б.** Об одном методе объединения частных прогнозов // В кн.: Статистические методы анализа экономической динамики. Уч. зап. по статистике. М.: Наука, 1973. Т. XXII-XXIII. С. 87-105.
11. **Ицхоки О.** Выбор модели и парадоксы прогнозирования // Квантиль. 2006. № 1. С. 43-51.
12. **Лукашин Ю.П.** Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М.: Финансы и статистика, 2003. С. 121-135.
13. **Остапок С.Ф., Мотова М.А.** Модели построения комбинированного прогноза развития научно-технической сферы // Проблемы прогнозирования. 2004. № 1. С. 146 - 156.
14. **Френкель А.А.** Прогнозирование производительности труда: методы и модели. М.: Экономика, 1989. С. 142-154.
15. **Френкель А.А., Сурков А.А.** Объединение прогнозов - эффективный инструмент повышения точности прогнозирования // Экономист. 2015. № 1. С. 44 - 56.
16. **Френкель А.А., Райская Н. Н., Бурцева Т.А., Сурков А.А.** Повышение точности прогнозирования инвестиций на основе объединения различных прогнозов // Научный вестник ИЭП им. Гайдара. 2015. № 15/1. С. 48 - 50.
17. **Яковенко А.А.** Комбинирование результатов прогнозирования временных рядов как метод повышения точности прогноза // Сборник научных трудов НГТУ. 2008. № 2 (52). С. 71-78.
18. **Armstrong J.S.** Combining forecasts: the end of the beginning or the beginning of the end? // International Journal of Forecasting. 1989. Vol. 5. P. 585-588.
19. **Armstrong J.S.** Combining forecasts // Kluwer Academic Publishers. 2001. P. 1-19.
20. **Barnard G.A.** New methods of quality control // J. R. Statist. Soc.. 1963. Vol. 126. P. 255-259.
21. **Bates J.M. and Granger C.W.J.** The combination of forecasts // Operational Research Quarterly. 1969. Vol. 20. P. 451-468.
22. **Bessler D.A., Brandt J.A.** Forecasting livestock prices with individual and composite methods // Applied Economics. 1981. Vol. 13. P. 513-522.
23. **Bunn D.W.A** Bayesian approach to the linear combination of forecasts // Operational Research Quarterly. 1975. Vol. 26. P. 325-329.
24. **Bunn D.W.A** Comparative evaluation of the outperformance and minimum variance procedures for the linear synthesis of forecasts // Operational research quarterly. 1977. Vol. 28. № 3. P. 653-662.
25. **Clemen R.T.** Linear constraints and the efficiency of combined forecasts // Journal of Forecasting. 1986. Vol. 5. P. 31-38.
26. **Clemen R.T.** Combining forecasts: a review and annotated bibliography // International Journal of Forecasting. 1989. Vol. 5. P. 559-583.
27. **Clemen R.T. and Winkler R.L.** Combining economic forecasts // Journal of Business & Economic Statistics. 1986. Vol. 1. P. 39-46.
28. **Clements M. P. and Hendry D. F.** Explaining the results of the M3 forecasting competition, 2001.
29. **Crane D. B. and Crotty J.R.** A two-stay forecasting model: Exponential smoothing and multiple regression // Management Science. 1967. Vol. 13. P. 501-507.
30. **Croushore D.** Introducing the survey of professional forecasters. Business review, Federal Reserve Bank of Philadelphia, 1993.
31. **Fang Y.** Forecasting combination and encompassing tests // International Journal of Forecasting. 2003. Vol. 19. P. 87-94.
32. **Fiordaliso A.** Combining forecasts a fuzzy approach. International Symposium on Intelligent Systems, 1997.
33. **Flores B. E. and White E. M.** Subjective versus Objective Combining of Forecasts: an Experiment // Journal of Forecasting. 1989. Vol. 8. P. 331-341.
34. **Goodwin P.** New evidence on the value of combining forecasts // FORESIGHT. 2009. Vol. 12. P. 33-35.
35. **Granger C. W. J.** Aggregation of time series variables - a survey // Institute for Empirical Macroeconomics and University of Minnesota, 1988.
36. **Granger C. W. J.** Invited review: combining forecasts - twenty years later // Journal of Forecasting. 1989. Vol. 8. P. 167-173.
37. **Granger C. W. J. and Ramanathan R.** Improved methods of combining forecasts // Journal of Forecasting. 1984. Vol. 3. P. 197-204.
38. **Gupta S. and Wilton P. C.** Combination of forecasts: an extension // Management Science. 1987. Vol. 3. P. 356-371.
39. **Gupta S. and Wilton P.C.** Combination of Economic Forecasts: An Odds-Matrix Approach // Journal of Business and Economic Statistics. 1988. Vol. 6. P. 373-379.
40. **Hibon M., Evgeniou T.** To combine or not to combine: selecting among forecasts and their combinations // International Journal of Forecasting. 2005. Vol. 21. P. 15- 24.
41. **Jose V. R. R. and Winkler R. L.** Simple robust averages of forecasts: some empirical results // International Journal of Forecasting. 2008. Vol. 24. P. 163-169.

42. **Kang H.** Unstable weights in the combination of forecasts // *Management Science*. 1986. Vol.6. P. 687-695.
43. **Mahmoud A.** Accuracy in Forecasting: a Survey // *Journal of Forecasting*. 1984. Vol. 5. P. 139-159.
44. **Makridakis S.** Why combining works? // *International Journal of Forecasting*. 1989. Vol. 5. P. 601-603.
45. **Makridakis S. and Hibon M.** The M3-Competition: results, conclusions and implications // *International Journal of Forecasting*. 2000. Vol. 16. P. 451-476.
46. **Makridakis S. and Winkler R.L.** Averages of forecasts: some empirical results // *Management Science*. 1983. Vol. 9. P. 987-996.
47. **Makridakis S., Chatfield C., Hibon M., Lawrence M., Mills T., Ord K., Simmons L.F.** The M2-Competition: a real-time judgmentally based forecasting study // *International Journal of Forecasting*. 1993. Vol. 16. P. 451-476.
48. **Makridakis S. et al.** The Accuracy of Extrapolation (Time Series) Methods: Result of a Forecasting Competition // *Journal of Forecasting*. 1982. Vol. 1. P. 111-153.
49. **Makridakis S. et al.** The Accuracy of Major of Extrapolation (Time Series) Methods // *Wiley*. London (in press). 1983.
50. **Mancuso A. C. B. and Werner L.** Review of combining forecasts approaches // *Independent Journal of Management & Production*. 2013. Vol. 4. P. 248-277.
51. **McIntoch C. S. and Bessler D. A.** Forecasting agricultural prices using a Bayesian composite approach // *Southern Journal of Agricultural Economics*. 1988. Vol. 1. P. 73 - 80.
52. **Menezes L. M., Bunn D. W. and Taylor J.W.** Review of guidelines for the use of combined forecasts // *European Journal of Operational Research*. 2000. Vol. 120. P. 190-204.
53. **Newbold P. and Granger C.W.J.** Experience with forecasting univariate time series and the combination of forecasts // *J.R. Statist. Soc.* 1974. Vol.137. P. 131-164.
54. **Russell T. D. and Adam T. D. Jr.** An empirical evaluation of alternative forecasting combinations // *Management Science*. 1987. Vol.10. P. 1267-1276.
55. **Smith D. G. C.** Combination of forecasts in electricity demand prediction // *Journal of Forecasting*. 1989. Vol. 8. P. 349-356.
56. **Stock J. H. and Watson M. W.** Combination forecasts of output growth in a seven-country data set // *Journal of Forecasting*. 2004. Vol. 23. P. 405-430.
57. **Taylor J. W. and Majithia S.** Using combined forecasts with changing weights for electricity demand profiling // *Journal of the Operational Research Society*. 2000. Vol. 51. P. 72-82.
58. **Trenkler G. and Gotu B.** Combination of forecasts: a bibliography // *Department of Statistics University of Dortmund*, 1998.
59. **Trenkler G. and Liski E.P.** Linear constraints and the efficiency of combined forecasts // *Journal of Forecasting*. 1986. Vol. 5. P. 197-202.
60. **Wallis K. F.** Combining forecasts - forty years later // *Applied Financial Economics*. 2011. Vol. 21. P. 33-41.
61. **Winkler, R. L., & Clemen, R. T.** Sensitivity of weights in combining forecasts // *Operations Research*. 1992. Vol. 40. P. 609-614.
62. **Winkler R. L. and Makridakis S.** The combination of forecasts // *J. R. Statist. Soc.* 1983. Vol. 146. P. 150-157.
63. **Yang Y.** Combining forecasting procedures: some theoretical results // *Department of Statistics and Statistical Laboratory Iowa State University*. 2001a.
64. **Yang Y.** Adaptive regression by mixing // *Journal of American Statistical Association*. 2001b. Vol. 96. P. 574- 588.
65. **Zarnowitz V.** An appraisal of short-term economic forecasts // *National Bureau of Economic Research*. New York. 1967. P. 123 - 125.
66. **Zou H. and Yang Y.** Combining time series models for forecasting // *International Journal of Forecasting*. 2004. Vol. 20. P. 69-84.

METHODOLOGICAL APPROACHES TO IMPROVEMENT OF FORECAST ACCURACY BY COMBINING FORECASTS

Alexander Frenkel

Author affiliation: Center Institute of Economics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia). E-mail: ie_901@inecon.ru.

Anton Surkov

Author affiliation: Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering (Obninsk, Russia). E-mail: surkoff@inbox.ru

The authors introduce problems of improvement of forecast accuracy and offer several ways of their solution, basing on a retrospective analysis of domestic and foreign studies on methodology of socio-economic forecast. In their opinion, a real modern solution to the problem is in implementation of the approach, linked to forecast combination, because it is difficult to prefer one forecasting method to another.

Special attention is driven to private forecasts combination technique, to the efficiency of these combination methods and to the optimization of the number of selected forecast options for combination.

Combination of forecasts has already proved itself in practice and it is not inferior to the private methods of forecasting in accuracy. The main idea of combining forecasts is the use of all available information regarding various forecasting methods, even if these methods are not sufficiently accurate.

This paper is a review of different ways of constructing weights for combining forecasts. Methods of combining forecasts are described as follows: 1) by averaging private forecasts, 2) along with using the method of least squares, 3) involving minimization of an error

variance of combined forecast, 4) based on retrospective forecasts 5) based on factor analysis, 6) with a use of paired comparisons, 7) based on sequential quadratic programming. Moreover, advantages and disadvantages of different methods of weighing rates are introduced.

The conclusion of the article contains tables with basic and most frequently used methods of combining forecasts and a description of results obtained from these method. There is also a vast bibliography of scientific publications, of both domestic and foreign authors on the subject.

Keywords: prediction, forecast, combined forecast, the association forecasts, weighting rates..

JEL: C53, E27.

References

1. **Armstrong J.S.** Combining forecasts, Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 1 - 19.
2. **Armstrong J.S.** Combining forecasts: the end of the beginning or the beginning of the end? *International Journal of Forecasting*, 1989, Vol. 5, pp. 585-588.
3. **Baltrushevich T.G.** Modeli i metody ocenki effektivnosti gibkikh proizvodstvennyh system. Avtoref. dis. kand. ec. nauk [Models and methods for evaluating the effectiveness of flexible production systems. Extended abstract of PhD diss. (econ.)]. Moscow, 1991, pp. 17-20. (in Russ.).
4. **Barnard G.A.** New methods of quality control, *J. R. Statist. Soc.*, 1963. Vol. 126. pp. 255 - 259.
5. **Bates J.M. and Granger C.W.J.** The combination of forecasts, *Operational Research Quarterly*, 1969, Vol. 20, pp. 451-468.
6. **Bejlinson Ja.E., Motova M.A.** Kombinirovannye modeli prognoza [Combined forecasting models] *Jekspres-informaciya, Seriya: Modelirovanie social'no-ekonomicheskikh processov*, 1990, no. 2. pp. 110-121. (In Russ.)
7. **Bessler D.A., Brandt J.A.** Forecasting livestock prices with individual and composite methods, *Applied Economics*, 1981, Vol. 13, pp. 513-522.
8. **Bunn, D.W.A.** Bayesian approach to the linear combination of forecasts, *Operational Research Quarterly*, 1975, Vol. 26, pp. 325-329.
9. **Bunn, D.W.A.** Comparative evaluation of the outperformance and minimum variance procedures for the linear synthesis of forecasts, *Operational research quarterly*, 1977, Vol. 28, № 3, pp. 653-662.
10. **Clemen R.T. and Winkler R.L.** Combining economic forecasts, *Journal of Business & Economic Statistics*, 1986, Vol. 1, pp. 39-46.
11. **Clemen R. T.** Combining forecasts: a review and annotated bibliography, *International Journal of Forecasting*, 1989, Vol. 5, pp. 559-583.
12. **Clemen R. T.** Linear constraints and the efficiency of combined forecasts, *Journal of Forecasting*, 1986, Vol. 5, pp. 31-38.
13. **Clements M.P. and Hendry D.F.** Explaining the results of the M3 forecasting competition. 2001.
14. **Crane D.B. and Crotty J.R.** A two-stay forecasting model: Exponential smoothing and multiple regression, *Management Science*, 1967, Vol. 13, pp. 501-507.
15. **Croushore D.** Introducing the survey of professional forecasters. Business review, Federal Reserve Bank of Philadelphia. 1993.
16. **Dubrova T.A.** Statisticheskij analiz i prognozirovanie jekonomicheskoy dinamiki: problemi i podhody [Statistical analysis and forecasting of economic dynamics: problems and approaches], *Metodologija statisticheskogo issledovaniya social'no-jekonomicheskikh processov*. Moscow, Juniti, 2012, pp. 129-138. (In Russ.)
17. **Ershov Je.B.** Ob odnom metode ob'edineniya chastnyh prognozov [A method of combining private forecasts], *Statisticheskie metody analiza jekonomicheskoy dinamiki. Uch. zap. po statistike*. Moscow, Nauka. 1973 Vol. XXII-XXIII, pp. 87-105. (In Russ.)
18. **Fang Y.** Forecasting combination and encompassing tests, *International Journal of Forecasting*, 2003, Vol. 19, pp. 87-94.
19. **Fiordaliso A.** Combining forecasts a fuzzy approach. *International Symposium on Intelligent Systems*. 1997.
20. **Flores B.E. and White E.M.** Subjective versus Objective Combining of Forecasts: an Experiment, *Journal of Forecasting*, 1989, Vol. 8, pp. 331-341.
21. **Frenkel' A.A.** Prognozirovanie proizvoditel'nosti truda: metody i modeli [Forecasting labor productivity: methods and models], Moscow, Jekonomika, 1989, pp. 142-154. (in Russ.)
22. **Frenkel' A.A., Rajskaja N. N., Burceva T.A., Surkov A.A.** Povyshenie tochnosti prognozirovaniya investicij na osnove ob'edineniya razlichnyh prognozov [Improving accuracy of forecasting investment by combining different forecasts], *Nauchnyj vestnik, Gaidar Institute for the Economic in Policy*, 2015, № 15\1, pp. 48-50. (In Russ.).
23. **Frenkel' A.A., Surkov A.A.** Ob'edinenie prognozov - effektivnyj instrument povysheniya tochnosti prognozirovaniya [Combining forecasts - an effective tool for improving the accuracy of forecasting], *Jekonomist*. 2015. № 1. P. 44 - 56. (in Russ.)
24. **Golovchenko V.B., Noskov S. I.** Kombinirovaniye prognozov s uchetoj ekspertnoj informacii [Combining forecasts based on expert information]. *Avtomatika i telemekhanika*. 1992, № 11, pp. 109-117. (In Russ.)
25. **Goodwin P.** New evidence on the value of combining forecasts. *FORESIGHT*, 2009, Vol. 12, pp. 33 - 35.
26. **Gorelik N.A., Frenkel' A.A.** Statisticheskie problemy jekonomicheskogo prognozirovaniya [Statistical problems of economic forecasting], *Statisticheskie metody analiza jekonomicheskoy dinamiki. Uch. zap. po statistike*. Moscow, Nauka, 1983, Vol. 46. pp. 9- 48. (In Russ.)
27. **Granger C. W. J.** Aggregation of time series variables - a survey, *Institute for Empirical Macroeconomics and University of Minnesota*. 1988.
28. **Granger C. W. J., Ramanathan R.** Improved methods of combining forecasts, *Journal of Forecasting*. 1984, Vol. 3, pp. 197-204.
29. **Granger C. W. J.** Invited review: combining forecasts - twenty years later, *Journal of Forecasting*, 1989, Vol. 8, pp. 167-173.
30. **Gupta S. and Wilton P. C.** Combination of Economic Forecasts: An Odds-Matrix Approach, *Journal of Business and Economic Statistics*, 1988, Vol. 6, pp. 373-379.

31. **Gupta S.** and **Wilton P. C.** Combination of forecasts: an extension, *Management Science*, 1987, Vol. 3, pp. 356-371.
32. **Hibon M., Evgeniou T.** To combine or not to combine: selecting among forecasts and their combinations. *International Journal of Forecasting*, 2005, Vol. 21, pp. 15-24.
33. **Ichoki O.** Vybór modeli i paradoksy prognozirovaniya [Model selection and paradoxes of prediction]. *Kvantil'*, 2006, № 1, pp. 43-51. (In Russ.)
34. **Jakovenko A.A.** Kombinirovaniye rezul'tatov prognozirovaniya vremennykh ryadov kak metod povysheniya tochnosti prognoza [Combining the results of time series prediction as a method of improving the accuracy of forecasting], *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*. 2008, № 2(52), pp. 71 - 78. (In Russ.)
35. **Jose V.R.R.** and **Winkler R.L.** Simple robust averages of forecasts: some empirical results. *International Journal of Forecasting*, 2008, Vol. 24, pp. 163-169.
36. **Kang H.** Unstable weights in the combination of forecasts. *Management Science*, 1986, Vol. 6, pp. 687-695.
37. **Lukashin Ju. P.** Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovaniya vremennykh ryadov [Adaptive methods of short-term time series prediction]. Moscow: *Finansy i statistika*, 2003, pp. 121-135. (In Russ.)
38. **Mahmoud A.** Accuracy in Forecasting: a Survey. *Journal of Forecasting*, 1984, Vol. 5, pp. 139-159.
39. **Makridakis S., Hibon M.** The M3-Competition: results, conclusions and implications. *International Journal of Forecasting*, 2000, Vol. 16, pp. 451-476.
40. **Makridakis S., Winkler R. L.** Averages of forecasts: some empirical results. *Management Science*, 1983, Vol. 9, pp. 987-996.
41. **Makridakis S.** et al. The Accuracy of Extrapolation (Time Series) Methods: Result of a Forecasting Competition. *Journal Forecasting*, 1982, Vol. 1, pp. 111-153.
42. **Makridakis S.** et al. The Accuracy of Major of Extrapolation (Time Series) Methods, Wiley. London (in press). 1983.
43. **Makridakis S.** Why combining works? *International Journal of Forecasting*, 1989, Vol. 5, pp. 601-603.
44. **Makridakis S., Chatfield C., Hibon M., Lanrence M., Mills T., Ord K., Simmons L.F.** The M2-Competition: a real-time judgmentally based forecasting study. *International Journal of Forecasting*, 1993, Vol. 16, pp. 451-476.
45. **Mancuso A.C.B., Werner L.** Review of combining forecasts approaches. *Independent Journal of Management & Production*, 2013, Vol. 4, pp. 248-277.
46. **McIntoch C.S., Bessler D.A.** Forecasting agricultural prices using a Bayesian composite approach. *Southern Journal of Agricultural Economics*, 1988, Vol. 1, pp. 73-80.
47. **Menezes L. M., Bunn D. W. and Taylor J. W.** Review of guidelines for the use of combined forecasts, *European Journal of Operational Research*. 2000. Vol. 120. P. 190-204.
48. **Newbold P. and Granger C. W. J.** Experience with forecasting univariate time series and the combination of forecasts. *J. R. Statist. Soc.*, 1974, Vol. 137, pp. 131-164.
49. **Ostapjuk S.F., Motova M.A.** Modeli postroeniya kombinirovannogo prognoza razvitiya nauchno-tehnicheskoy sfery [Model of construction of a combined forecast of the development of scientific and technical fields]. *Problemy prognozirovaniya*, 2004, № 1, pp. 146-156. (In Russ.)
50. **Russell T. D., Adam T. D. Jr.** An empirical evaluation of alternative forecasting combinations. *Management Science*, 1987, Vol. 10, pp. 1267-1276.
51. **Smith D.G.C.** Combination of forecasts in electricity demand prediction. *Journal of Forecasting*, 1989, Vol. 8, pp. 349-356.
52. **Stock J.H. and Watson M.W.** Combination forecasts of output growth in a seven-country data set. *Journal of Forecasting*, 2004, Vol. 23, pp. 405-430.
53. **Taylor J.W. and Majithia S.** Using combined forecasts with changing weights for electricity demand profiling. *Journal of the Operational Research Society*, 2000, Vol. 51, pp. 72-82.
54. **Trenkler G. and Gotu B.** Combination of forecasts: a bibliography, Department of Statistics University of Dortmund. 1998.
55. **Trenkler G. and Liski E. P.** Linear constraints and the efficiency of combined forecasts. *Journal of Forecasting*, 1986, Vol. 5, pp. 197-202.
56. **Vasil'ev A.A.** Genezis gibridnykh modeley prognozirovaniya na osnove ob#edineniya prognozov [Genesis hybrid predictive models based on the association forecasts]. *Vestnik TvGU. Seriya «Jekonomika i upravlenie»*. 2014, № 23, pp. 316-331. (In Russ.)
57. **Vasil'ev A.A.** Gibridnye modeli prognoza ekonomicheskikh pokazateley na osnove vzveshennogo arifmeticheskogo srednego prostogo nabora prognozov [Hybrid models forecast of economic indicators, based on the weighted arithmetic average of simple set of forecasts], *Vestnik TvGU. Seriya «Jekonomika i upravlenie»*. 2012, № 13, pp. 149-165. (In Russ.)
58. **Vasil'ev A.A.** Ob#edinenie prognozov na osnove ocenki Hodzhesa-Lemana I ego modifikacijah [Combining forecast based on an assessment Hodges-Lehmann and its modifications], *Vestnik TvGU. Seriya «Jekonomika i upravlenie»*. 2014, № 4, pp. 201-215. (In Russ.)
59. **Vasil'ev A.A.** Ob#edinenie prognozov na osnove usechennykh i vinzorirovannykh srednykh [Combining forecast based on the truncated and vinzorirovannykh medium], *Vestnik TvGU. Seriya «Jekonomika i upravlenie»*. 2014, № 2, pp. 204 - 215. (In Russ.)
60. **Wallis K.F.** Combining forecasts - forty years later. *Applied Financial Economics*, 2011, Vol. 21, pp. 33-41.
61. **Winkler R.L. and Makridakis S.** The combination of forecasts. *J. R. Statist. Soc.*, 1983, Vol. 146, pp. 150-157.
62. **Winkler, R.L., Clemen, R. T.** Sensitivity of weights in combining forecasts. *Operations Research*, 1992, Vol. 40, pp. 609-614.
63. **Yang Y.** Adaptive regression by mixing. *Journal of American Statistical Association*, 2001b, Vol. 96, pp. 574-588.
64. **Yang Y.** Combining forecasting procedures: some the oretical results, Department of Statistics and Statistical Laboratory Iowa State University. 2001a.
65. **Zarnowitz V.** An appraisal of short-term economic forecasts, National Bureau of Economic Research. New York. 1967. P. 123-125.
66. **Zou H. and Yang Y.** Combining time series models for forecasting. *International Journal of Forecasting*, 2004, Vol. 20, pp. 69-84.