МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНОЧНОГО ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ СПРОСА*

В.К. Горбунов,
Л.А. Козлова

Излагается сущность кризисного состояния неоклассической теории потребительского спроса и вариант выхода из кризиса, основанный на концепции статистического «ансамбля» потребителей как исходного объекта теории агрегированного рыночного спроса.

Рыночный спрос описывается моделью максимизации полезности, разработанной в рамках неоклассической парадигмы для потребителя-индивида. В качестве метода проверки адекватности такой модели коллективного спроса используется непараметрический метод анализа соответствия модели торговой статистике. Представлены аналитические индексы спроса и их варианты - инвариантные и квазиинвариантные индексы. Применение непараметрического метода базируется на реальных данных о спросе на продукты питания в Российской Федерации; при этом строятся квазиинвариантные индексы спроса.

Ключевые слова: рыночный спрос, непараметрический анализ, неравенства Африата, инвариантные и квазиинвариантные индексы.

JEL: B41, C02, C43.

Проблема рыночного спроса в экономической теории и практике. В седьмом номере журнала «Вопросы статистики» за 2014 г. опубликована статья А.В. Короткова и В.Г. Минашкина [11], в которой авторы высказывают озабоченность тем, что «В современной отечественной литературе, изданной уже после перехода к рыночной экономике, теории спроса, пожалуй, уделяется меньше внимания, чем в книгах и статьях советского периода...».

Наше изложение состояния теории спроса и равновесия основано на современных западных учебниках, например [19], на новых монографиях [17, 20] и на множестве статей ведущих западных журналов, часть которых приведена в данной статье и в [3-7]. Это состояние является кризисным, что широко обсуждается как за рубежом [18], так и в России [12]. Причиной этого кризиса с нашей точки зрения [3][1], является схема Л. Вальраса построения теории *рыночного потребительского спроса*, имеющего практическое и теоретическое значение, на основе схоластической теории *спроса независимого индивида*. Эта математическая теория была разработана в рамках нормативного подхода и методологического индивидуализма, соответствующего неоклассической парадигме экономического мейнстрима (индивидуализм, рациональность, саморегулирование, математизация) [19, 20]. Она оказалась в основном неприменимой к рыночному спросу, понимаемому Вальрасом и современными участниками мэйнстрима как сумма спросов независимых рациональных индивидов.

Горбунов Владимир Константинович (vkgorbunov@mail.ru) - д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Управления научных исследований, Ульяновский государственный университет. Автор является референтом журналов «Zentralblatt MATH» и «Mathematical Review» по разделам потребительского спроса, производства и экономического равновесия.

Козлова Любовь Александровна (love792003@mail.ru) - канд. техн. наук, доцент кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет.

* Исследование поддержано РФФИ, проект № 14-06-00401 «Развитие теории и математических моделей рыночного спроса и общего экономического равновесия», и Минобрнауки России - задание № 2014/296 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания, тема «Развитие математических моделей и методов анализа производства и рыночного спроса».

[1] Эта точка зрения впервые выражена в учебном пособии 2001 г. (издание УлГУ), изданном в 2004 г. как монография [3].

Поясним сущность проблемы рыночного спроса в рамках позитивной экономики, понимаемой как доказательная система знаний, опирающаяся на факты [1], а не на субъективное представление исследователя об объекте, свойственное как неоклассической экономической теории (Economics) [19, 20], так и политической экономии. Именно позитивная экономика, отвечающая на вопрос «что есть?», интересна экономистам-практикам (специалистам по стоимости производства товаров и услуг), а не нормативная, излагающая мнения типа «что должно быть?» и относящаяся более к идеологии, чем к науке.

Понятие потребительского спроса у той части экономистов-теоретиков, которые ориентируются на факты и применяют количественные (математические) методы экономического анализа[2], давно установилось. Не претендует на откровение следующее определение: *спросом (индивидуальным или рыночным) называется зависимость количеств продаж товаров и услуг данного рынка от основных наблюдаемых факторов, имеющих количественную оценку*.

Потребительский спрос будем относить к рынку n товаров и услуг конечного потребления (благ). Наблюдаемые показатели спроса - это количества продаж $x = (x_1, ...x_n)$, где каждая компонента x_i неотрицательна и представляет количество продаж блага i за период статистической отчетности (день, год), а также цены продаж, составляющие вектор положительных чисел $p = (p_1, ...p_n)$. В общем случае (без специальных экспериментов) наблюдается лишь коллективный рыночный спрос. Такой спрос проявляется *торговой статистикой*:

$$\left\{p^t, x^t : t = \overline{0,T}\right\}, \qquad (1)$$

где пары (p^t, x^t) представляют усредненные некоторым образом цены и количества продаж за отчетный период. Вопросы первичной обработки статистических данных относятся к компетенции органов статистики (см. Руководство [14], разделы 1-14).

Статистика (1) неявно представляет существенный фактор спроса - совокупные расходы потребителей рынка на все блага рынка, представляемые скалярными произведениями векторов цен p^t и количеств x^t:

$$e_t = \left\langle p^t, x^t \right\rangle.$$

Других существенных факторов статистика не представляет, поэтому в теоретической экономике установилась спецификация функций спроса как непрерывных векторных функций $x(p,e)$ с *условием нуля* $x(p,0) = 0$.

В учебниках и монографиях по экономической теории излагается лишь теория *независимого индивидуального потребителя*, максимизирующего свою субъективную полезность (порядковую в современном варианте). Из известных нам источников только англоязычный учебник [19] посвящает четвертую главу (Ch. 4. Aggregate Demand) проблеме агрегирования (по покупателям) спроса. Эта проблема заключается в выявлении условий на индивидуальные предпочтения, при которых одинаковая теория (максимизация полезности) применима как к индивидуальному, так и к рыночному спросу. В [19] излагается результат 1953 г. У. Гормана (W. Gorman), согласно которому *корректное агрегирование индивидуальных спросов в рыночный* (когда существует коллективная функция полезности, порождающая коллективный рыночный спрос) возможно тогда и только тогда, когда *все индивидуальные кривые Энгеля являются параллельными прямыми* (см. подробнее в [4]). Позже В.И. Зоркальцев получил более точный результат [8], согласно которому корректное агрегирование возможно тогда и только тогда, когда *все индивидуумы имеют одинаковые предпочтения и эти предпочтения однородны*. К несоответствующей действительности одинаковости предпочтений можно добавить аргумент редкости однородных предпочтений, когда спрос имеет структуру $x(p, e) = x(p)e$. В этом случае ценовая структура спроса $x(p)$ не зависит от уровня расходов.

Результат Гормана-Зоркальцева говорит об ошибочности и бесперспективности построения теории независимого индивидуального потребителя. Этот факт хорошо известен экономистам, знакомым с современным состоянием экономической науки, однако конст-

[2] Мы исключаем здесь авторов экономических «теорий чисто логического характера, не имеющих никакой реальной связи с фактами» [1, с. 13].

руктивной альтернативы неудачной теории спроса до недавнего времени не было предложено, и важные разделы теоретической экономики (теория благосостояния и теория равновесия Вальраса в варианте К. Эрроу и Ж. Дебре) и теория экономических индексов, отражающих предпочтения потребителей, остаются до настоящего времени теоретической схоластикой или (экономические индексы) эвристикой. Более полная аргументация этого вывода содержится в [3-6].

Статистический ансамбль потребителей - исходный объект теории спроса. В книге [3] предложено и обосновано считать рыночный спрос исходным объектом теории спроса и использовать для ее построения метод теории индивидуального спроса, глубоко разработанной в формальном отношении по образцу математической физики, но не отражающей своими аксиомами реальность - взаимовлияние, спонтанность, нерациональность реальных индивидов, внешние эффекты. В последующих статьях [4, 5, 6] формальный объект исследования - рыночный спрос - был заменен на реальный объект - *статистический ансамбль потребителей*, под которым понимается [6, с. 25]: *нечеткое множество потребителей рынка, обладающее статистической устойчивостью относительно зависимостей количеств продаж благ данного рынка от их цен и совокупных расходов всех потребителей.*

В этом определении использовано понятие «нечеткое множество», введенное в 1965 г. в теорию принятия решений американским математиком-кибернетиком Л. Заде. Принадлежность элемента некоторого универсального множества данному нечеткому множеству определяется степенью - числом отрезка [0, 1]. В нашем случае универсальное множество - это население Земли, и степень принадлежности каждого человека 'нечеткому множеству потребителей исследуемого рынка равна доле его расходов на данном рынке от всех его расходов. Понятие «нечеткое множество потребителей» концептуальное и не нуждается в количественном уточнении. «Нечеткие потребители» рынка проявляются в статистике (1), делая (или не делая) покупки, учитываемые данными $\left\{x_i^t\right\}$.

Таким образом, теория рыночного спроса в модифицированном классическом варианте [3] раскрывается в рамках математической модели максимизации *коллективной функции предпочтения* (КФП) $u(x)$, непрерывной, возрастающей и вогнутой, на множестве доступных благ при ценах p и общих расходах e:

$$x(p,e)\in Arg\max\left\{u(x):\langle p,x\rangle\le e,\ \ x\ge 0\right\}. \quad (2)$$

В регулярном случае (строго вогнутая и непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$) задача (2) определяет однозначную и дифференцируемую (векторную) функцию спроса $x(p, e)$, обладающую всеми аналитическими свойствами неоклассической теории индивидуального спроса.

Таким образом, подход [3] к проблеме рыночного спроса, выходя из рамок неоклассической парадигмы [19, 20], преодолевает противоречия экономической теории, вытекающие из принципа индивидуализма, но сохраняет несомненное достоинство неоклассики - математизацию, обеспечивающую объективность и эффективность анализа рыночного спроса на основе модели (2).

Вопросом, нуждающимся в прояснении, является адекватность реальности представления рыночного спроса как априорного объекта теории. Этот вопрос решается непараметрическим методом Африата-Вэриана [16, 22, 23]. Этот метод построен в рамках стандартной теории индивидуального потребительского поведения, однако очевидно, что он может применяться и реально применяется (в основном эвристически, вопреки теореме о невозможности Зоркальцева) для анализа рыночного спроса.

Непараметрический анализ статистического спроса. Вопрос об адекватности классической модели спроса (2) данному рынку сводится к вопросу, существует ли такая КФП $u(x)$, что порождаемое этой функцией отображение рыночного спроса соответствует статистике (1)? В идеализированном случае отсутствия ошибок данных функция предпочтения $u(x)$ рационализирует данные (1), если [16, p. 69]:

$$u\left(x^t\right)=max\left\{u\left(x\right):\left\langle p^t,x\right\rangle\le e_t,\ \ x\ge 0\right\},\ t=\overline{0,T}.$$

Значения искомой функции предпочтения и множителя Лагранжа $\lambda(p,e)$ задачи (2) на данных (1) $u_t=u(x^t)$, $\lambda_t=\lambda(p^t,e_t)$ называются числами Африата. Введем кросс-коэффициенты

$$e_{ts} = \left\langle p^t, x^s \right\rangle, \; a_{ts} = e_{ts} - e_t, \; s,t = \overline{0,T}. \quad (3)$$

Теорема Африата [16]. Непрерывная, возрастающая, вогнутая функция предпочтения $u(x)$, рационализирующая данные (1), существует тогда и только тогда, когда существует положительное решение $\{u_t, \lambda_t\}$ неравенств

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0, \quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t. \quad (4)$$

Для построения индексов спроса, как показано далее, важное значение имеет случай однородных предпочтений. В этом случае известно [3, 23], что числа $\{u_t, \lambda_t\}$ связаны равенствами

$$u_t = \lambda_t e_t, \quad t = \overline{0,T}. \quad (5)$$

При этом трехкомпонентная система (4) переходит в двухкомпонентную систему

$$u_s - \lambda_t e_{ts} \le 0, \quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t. \quad (6)$$

Равенства (5) также позволяют рассмотреть вместо (6) две эквивалентные системы, определяющие независимо *u*-числа $\{u_t\}$ и λ-числа $\{\lambda_t\}$. Первая система:

$$u_s e_t \le u_t e_{ts}, \quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t. \quad (7)$$

Вторую систему удобно представить в терминах обратных множителей $z_t = 1/\lambda_t$:

$$e_t z_s \le e_{st} z_t, \quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t. \quad (8)$$

Теорема Африата является наиболее значительным результатом в теории потребительского спроса после работ Слуцкого и Хикса. В силу данной теоремы вопрос о существовании функции предпочтения, рационализирующей данные (1), решается конструктивно. Для этого следует попытаться найти положительное решение системы неравенств Африата (4). Коэффициенты (3) этой системы определяются по статистическим данным (1). Если положительное решение существует, то классическая модель (2) адекватна рынку, представленному этими данными. В случае, когда среди решений (4) существует решение, удовлетворяющее (5), то есть положительно разрешима система (6) или эквивалентные ей системы (7) и (8), то существует однородная рационализирующая функция $u(x)$, порождающая однородный спрос $x(p, e) = x(p)e$.

Формулировка теоремы Африата и описанный метод ее практического использования идеализированы, так как не учитывают неизбежные погрешности статистических данных. Отсутствие положительного решения системы (4) может быть следствием как неадекватности модели (2), так и неточности данных (1). Если система линейных неравенств совместна, то она имеет в общем случае многогранное множество решений. Учет погрешностей данных и допустимых уровней ошибок моделирования является нетривиальной проблемой идентификации любых математических моделей. Эти и вычислительные проблемы поиска наилучшего (в уточняемом смысле) положительного решения системы (4) рассмотрены в [3, 7, 9].

Индексы потребительского спроса. Основными характеристиками потребительского спроса являются его индексы, под которыми понимаются [3, с. 34]: *обобщенные скалярные измерители величины изменения (роста или снижения) показателей цен и количеств, соответственно, элементов данной группы благ.*

Индексы спроса строятся по данным торговой статистики (1). В практике статистических служб используются *бинарные статистические (формульные)* индексы цен и количеств потребления. Они строятся на основе статистических пар «цены-количества», отнесенных к двум индексируемым периодам, по некоторым алгебраическим формулам из значений индексируемых показателей (p^s, x^s) и (p^t, x^t) в моменты *(s, t)*, которые для определенности будем называть соответственно *базовым* и *текущим*.

Далее будем использовать наиболее распространенные бинарные индексы цен и количеств Ласпейреса P_{st}^L, Q_{st}^L и Пааше P_{st}^P, Q_{st}^P:

$$P_{st}^L = \frac{\left\langle p^t, x^s \right\rangle}{\left\langle p^s, x^s \right\rangle} \equiv \frac{e_{ts}}{e_s}, \quad Q_{st}^L = \frac{\left\langle p^s, x^t \right\rangle}{\left\langle p^s, x^s \right\rangle} \equiv \frac{e_{st}}{e_s},$$
$$P_{st}^P = \frac{\left\langle p^t, x^t \right\rangle}{\left\langle p^s, x^t \right\rangle} \equiv \frac{e_t}{e_{st}}, \quad Q_{st}^P = \frac{\left\langle p^t, x^t \right\rangle}{\left\langle p^t, x^s \right\rangle} \equiv \frac{e_t}{e_{ts}}. \quad (9)$$

Известно, что, как правило, индексы Пааше дают заниженные значения относительно индексов Ласпейреса:

$$P_{st}^{P}\ \mathrm{J}\ P_{st}^{L}, \quad Q_{st}^{P}\ \mathrm{J}\ Q_{st}^{L}. \qquad (10)$$

Эти *неравенства Пааше-Ласпейреса* выполняются обязательно, если статистика (1) рационализируется однородной функцией $u(x)$ [3, с. 98; 17, p. 11][3].

Важную роль в индексологии и наших исследованиях играют среднегеометрические индексов Ласпейреса и Пааше - *индексы Фишера:*

$$P_{\mathrm{st}}^{F} = \sqrt{P_{st}^{L} P_{st}^{P}} = \sqrt{\frac{e_{ts}}{e_s}\frac{e_t}{e_{st}}}, \quad Q_{st}^{F} = \sqrt{Q_{st}^{L} Q_{st}^{P}} = \sqrt{\frac{e_{st}e_t}{e_s e_{ts}}}. \qquad (11)$$

Существуют сотни формул бинарных индексов. Разные формулы, естественно, дают в общем случае различные значения, и это расхождение часто бывает неприемлемым. Для оценки качества различных индексов И. Фишером в 1922 г. была предложена система тестов [13, 3], ориентированная на свойства отношений цен и количеств элементарных показателей данных (1):

$$\pi_i^{st} = \frac{p_i^t}{p_i^s}, \quad \chi_i^{st} = \frac{x_i^t}{x_i^s}.$$

В международном «Руководстве по индексу потребительских цен» [13, глава 16] приведен 21 критерий (тест). Такое количество можно объяснить стремлением авторов Руководства охватить различные тонкости поведения множества формульных индексов. Напомним наиболее важные свойства (тесты) некоторых индексов цен P_{st} и количеств Q_{st}:

- индекс P_{st} (Q_{st}) является *транзитивным (цепное свойство)*, если для любых трех наблюдений (r, s, t) выполняется $P_{rt} = P_{rs} \cdot P_{st}$ ($Q_{rt} = Q_{rs} \cdot Q_{st}$);

- индексы P_{st} и Q_{st} являются *мультипликативными (тест стоимости)*, если $P_{st}\, Q_{st} = e_t / e_s$;

- индексы P_{st} и Q_{st} удовлетворяют тесту среднего, если:

$$\min_i \pi_i^{\mathrm{st}} \le P_{st} \le \max_i \pi_i^{\mathrm{st}}, \ \min_i \chi_i^{\mathrm{st}} \le Q_{st} \le \max_i \chi_i^{\mathrm{st}}.$$

Известно, что индексы Ласпейреса и Пааше (9) обладают из данных свойств только свойством среднего. Индексы Фишера (11) удовлетворяют всем тестам, кроме транзитивности, что не позволяет корректно сопоставлять более двух ситуаций. Также известно, что бинарные индексы не могут удовлетворять одновременно приведенным свойствам *транзитивности*, *мультипликативности* и *среднего* [21]. Это демонстрирует концептуальное несовершенство практической индексологии.

Вследствие множественности бинарных индексов и отсутствия «идеального» индекса в индексологии получил распространение релятивизм относительно выбора индексов в соответствии с целями их построения. Известно высказывание Ф. Эджворта о том, что множественность индексов позволяет исследователю выбирать тот, который наиболее соответствует целям исследования.

Аналитические индексы. Для более содержательной и объективной характеристики социально-экономической динамики следует учитывать не только изменение цен и доходов, но и эффекты замещения, порождаемые субъективными предпочтениями потребителей. Это возможно в рамках экономико-теоретического направления индексологии. В работе А.А. Конюса 1924 г. [10] был предложен «истинный индекс стоимости жизни», учитывающий рациональность поведения потребителей в рамках модели потребительского спроса (2). Это экономическое направление получило активное теоретическое развитие в зарубежных работах (для индивидуального спроса) [13, 17, 21], а также в наших (для рыночного спроса) [3, 7, 9]. В настоящее время эти индексы ввиду перегруженности атрибута «экономический» также называются «аналитическими» (Зоркальцев). Мы используем здесь последний термин.

Аналитические индексы цен и количеств потребления определяются *функцией потребительских расходов:*

$$e(p, w) = \min\{\langle p, x\rangle : u(x) \ge w,\ x \ge 0\}. \qquad (12)$$

Здесь $w > 0$ - заданный уровень потребления, определяемый некоторым набором благ x^0, то есть $w = u(x^0)$. Функция $e(p, w)$ определяет *аналитические индексы цен и количеств*

[3] Африат рассматривает в книге [17] только индекс цен для однородного по предпочтениям потребителя.

потребления на статистических данных (1) соответственно:

$$P(p^s,p^t;x)=\frac{e(p^t,u(x))}{e(p^s,u(x))},\ Q(x^s,x^t;p)=\frac{e(p,u(x^t))}{e(p,u(x^s))}. \tag{13}$$

Здесь наборы количеств *x* и цены *p* определяют произвольные *ситуации сравнения* (*reference situations* [21]).

Для практической реализации этих индексов (до настоящего времени лишь теоретических) естественно использовать ситуации, реализованные в статистике (1), выбирая базовую ситуацию $x=x^s$ или текущую $x=x^t$. Индекс Конюса - это индекс цен $P(p^s,p^t;x^s)$.

Известно [21, 3], что индексы (13) обладают свойствами транзитивности и *перекрестной мультипликативности*, то есть

$$P\left(p^s,p^t;x^s\right)Q\left(x^s,x^t;p^t\right)=e_t/e_s.$$

Свойство перекрестной мультипликативности можно исправить до обычной мультипликативности, введя усредненные (по Фишеру) аналитические индексы:

$$P(p^s,p^t;x^s,x^t)=\sqrt{P(p^s,p^t;x^s)P(p^s,p^t;x^t)},$$

$$Q(x^s,x^t;p^s,p^t)=\sqrt{Q(x^s,x^t;p^s)Q(x^s,x^t;p^t)}.$$

Для индексов (13) также выполняются односторонние оценки индексами Пааше и Ласпейреса [3, 13], но свойство среднего в общем случае не гарантировано.

Аналитические индексы (13), в отличие от формульных, основаны не на авторском субъективизме исследователей, а на учете рациональности поведения потребителей, приспосабливающихся к изменению рыночной конъюнктуры в соответствии со своими предпочтениями. Для конкретного рынка, представленного торговой статистикой, аналитические индексы существуют, если существует рационализирующая КФП.

Методологическая проблема агрегирования покупателей и технические трудности решения задачи построения рационализирующих функций предпочтения задержали развитие аналитического направления индексологии. В Руководстве [13, глава 17] аналитические индексы относятся к домохозяйству и называются ненаблюдаемыми. Тем не менее многими зарубежными авторами утверждается точка зрения, согласно которой такие индексы должны определять концептуальные рамки проблемы индексов.

Инвариантные и квазиинвариантные индексы. Числа Африата определяют условия интерполяции для восстановления рационализирующей функции предпочтения. Построив такую функцию, можно вычислять функцию потребительских расходов (12) и аналитические индексы (13), неявно отражающие всю имеющуюся статистическую базу о спросе. Однако методы построения регулярных функций полезности, подходящих для решения этой сложной задачи, пока лишь создаются [3]. Оказывается, что в случае однородности предпочтений аналитические индексы являются *идеальными индексами* и строятся непосредственно по числам Африата.

В случае *линейной однородности* функции $u(x)$ функция расходов (12) имеет вид:

$$e(p,u(x))=z(p)u(x) \text{ для любых } p>0,\ x>0, \tag{14}$$

где $z(p)=1/\lambda(p)$ - обратный множитель Лагранжа задачи (2) [17, 21, 3]. Функция $z(p)$ также линейно однородна, и из тождества (14) следует, что индексы (13) зависят только от пар $\left(p^t,p^s\right)$ или $\left(x^t,x^s\right)$:

$$P_{st}\equiv P\left(p^t,p^s\right)=\frac{z\left(p^t\right)}{z\left(p^s\right)}\equiv\frac{z^t}{z^s},\quad Q_{st}\equiv Q\left(x^t,x^s\right)=\frac{u\left(x^t\right)}{u\left(x^s\right)}\equiv\frac{u^t}{u^s}. \tag{15}$$

Таким образом, аналитические индексы (13) при однородности предпочтений не зависят от сопряженных величин (соответственно, количеств и цен) и вычисляются непосредственно по числам Африата, определяемым (неоднозначно) ввиду связи (5) одной из специальных систем (7) или (8). По причине независимости от сопряженной ситуации сравнения индексы (15) названы в [21] *инвариантными индексами*. Эти индексы удовлетворяют всем тестам Фишера, то есть являются идеальными.

Однако реальные предпочтения потребителей для содержательных групп с товарами различной субъективной ценности не однородны, следовательно, инвариантные индексы имеют ограниченное значение.

В книге [3] для случая неоднородных предпочтений предложены новые индексы, которые также можно строить только по числам Африата $\{u_t, \lambda_t\}$, но определяемым общей системой (4). По *u*-числам $\{u_t\}$ формально определяются *квазимножители* $\{\hat{\lambda}_t\}$ и обратные им числа $\hat{z}_t = 1/\hat{\lambda}_t$, обладающие свойством (5):

$$u_t = \hat{\lambda}_t e_t, \text{ или } \hat{z}_t = \frac{e_t}{u_t}.$$

По этим числам можно определить *индексы цен:*

$$\hat{P}_{st} = \frac{\hat{z}_t}{\hat{z}_s} = \frac{\hat{\lambda}_s}{\hat{\lambda}_t} = \frac{e_t u_s}{e_s u_t}, \qquad (16)$$

сохранив определение (15) для индексов количеств Q_{st}. Индексы цен (16), очевидно, транзитивны, и вместе с индексами Q_{st} они мультипликативны. В случае однородных предпочтений индексы $(\hat{P}_{st}, Q_{st})$ совпадают с инвариантными индексами (15), что объясняет их именование *квазиинвариантными индексами*. Свойство среднего в общем случае для этих индексов не гарантируется.

За основу определения квазиинвариантных чисел можно также взять λ-числа λ_t, введя *u*-квазичисла по формуле:

$$\hat{u}_t = \lambda_t e_t.$$

По этим числам можно определить индексы количеств

$$\hat{Q}_{st} = \frac{\hat{u}_t}{\hat{u}_s} = \frac{\lambda_t e_t}{\lambda_s e_s}, \qquad (17)$$

сохранив определение (15) для индекса цен P_{st}.

Пара индексов $(P_{st}, \hat{Q}_{st})$, как и симметричная пара $(\hat{P}_{st}, Q_{st})$, транзитивна и мультипликативна. В общем случае для них свойство среднего также не гарантировано теоретически. Их поведение относительно невыполнения этого важного свойства может быть различно как по величине, так и по направлению его возможного нарушения. Поэтому в [7] введены *симметризованные квазиинвариантные индексы:*

$$\bar{P}_{st} = \sqrt{P_{st}\hat{P}_{st}} = \sqrt{\frac{\lambda_s e_t u_s}{\lambda_t e_s u_t}}\,;\ \bar{Q}_{st} = \sqrt{Q_{st}\hat{Q}_{st}} = \sqrt{\frac{u_t \lambda_t e_t}{u_s \lambda_s e_s}}. \qquad (18)$$

Эти индексы, очевидно, сохраняют свойства транзитивности и мультипликативности пар $(P_{st}, \hat{Q}_{st})$ и $(\hat{P}_{st}, Q_{st})$. Они образованы подобно индексам Фишера (11) как среднегеометрические инвариантных (15) и квазиинвариантных индексов (16) и (17). Симметризованные индексы (18) находятся в отношении дополнительности с индексами Фишера по свойствам транзитивности и среднего. Индексы (P^F_{st}, Q^F_{st}), в отличие от $(\bar{P}_{st}, \bar{Q}_{st})$, удовлетворяют тесту среднего, но они не транзитивны. И наоборот, индексы $(\bar{P}_{st}, \bar{Q}_{st})$ транзитивны, но тест среднего может для них нарушаться. Естественно ожидать, что симметризация (18) уменьшает возможные нарушения этого теста.

Для построения инвариантных и квазиинвариантных индексов требуется доопределение задач решения систем Африата с учетом погрешностей данных (1) и неединственности решений совместных систем неравенств. Эта проблема решена в [3] на основе релаксационно-штрафного метода (РШМ) [2]. Опишем кратко схему этого метода для общей системы неравенств Африата (4).

Согласно РШМ система (4) корректируется введением релаксационного параметра *r*:

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le r,\ \ s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t, \qquad (19)$$

гарантирующего совместность новой системы при достаточно больших значениях $r > 0$. Алгебраическая однородность системы (19) и вхождение чисел $\{u_t\}$ в неравенства разностями $u_s - u_t$ позволяет ввести условия:

$$\lambda_0 = 1, \quad u_0 = e_0, \qquad (20)$$

соответствующие смыслу множителей λ_t как *уровней цен* и «полезностей» u_t как *уровней потребления*. При этом система (19) остается неоднозначно разрешимой. Задача уточняется введением пробного набора чисел $\{u^F_t, \lambda^F_t\}$, определяемого статистическими индексами Фишера (11):

$$u^F_t = e_0 Q^F_{0t}, \quad \lambda^F_t = \frac{1}{P^F_{0t}}, \quad t = \overline{1,T}. \qquad (21)$$

Формулы (21) являются эвристическими. Разрешенные относительно $Q^F_{0t} = u^F_t / e_0$ и $P^F_{0t} = 1/\lambda^F_t$ они повторяют структуру инвариантных индексов (15). Ставится двухэтапная задача лексикографической минимизации. На первом этапе определяется наименьший параметр релаксации *r**, при котором система (19) с условиями (20) совместна. Это задача линейного программирования (ЛП).

Если полученное значение r^* соответствует уровню погрешностей данных (1) (это специальная проблема оценки погрешностей), то гипотеза существования рационализирующей функции предпочтения принимается? и на втором этапе решается задача квадратичного программирования, заключающаяся в нахождении среди решений системы (19), где $r = r^*$, набора чисел $\{u_t, \lambda_t\}$, ближайшего (в евклидовой метрике) набору (21). Подробнее данный метод представлен в [3, 7, 9].

Пример построения квазиинвариантных индексов. Приведем результаты построения квазиинвариантных индексов для официальных данных Росстата о потреблении в России в 2000-2013 гг. четырtх групп основных продовольственных товаров: хлебные продукты, молоко и молочные продукты, мясо и мясопродукты, фрукты [14, 15].

Статистика потребления представлена в таблице 1. Количества потребления даны на одного человека в домашних хозяйствах городской местности. Строка 13/00 представляет отношения показателей строк 2013 и 2000, то есть элементарные индексы $\{\pi_i^{0T}, \chi_i^{0T}\}$, где $T = 13$.

Таблица 1

Статистика потребления в России. 2000-2013 гг.

Год	Цены (руб/кг)				Потребление (кг/год)				Расходы (руб/чел)
	хлбпр	молпр	мяспр	фрукты	хлбпр	молпр	мяспр	фрукты	
2000	11,82	41,44	70,40	21,93	100	196	52	30	13636,3
2001	12,03	48,21	88,14	27,50	105	210	55	36	17242,9
2002	13,20	50,58	92,80	30,03	104	226	60	38	19525,2
2003	15,82	55,02	98,34	31,28	100	224	63	39	21293,6
2004	17,59	61,01	118,03	33,29	96	229	63	42	24494,0
2005	17,64	68,28	136,20	35,96	104	249	67	56	29975,4
2006	19,36	73,15	146,59	39,03	99	248	70	57	32566,7
2007	24,51	102,84	158,19	43,99	95	251	74	62	42609,5
2008	31,37	109,71	193,92	49,91	93	249	78	66	48692,9
2009	30,48	109,49	207,74	50,38	91	261	76	68	50598,8
2010	37,65	126,56	219,87	56,99	94	269	82	74	59795,3
2011	36,11	133,98	249,18	54,80	92	269	83	75	64038,6
2012	37,14	137,43	267,31	58,17	92	274	85	79	68360,9
2013	39,19	158,51	270,02	57,15	90	278	87	81	75669,6
13/00	3,3	3,8	3,8	2,6	0,9	1,4	1,7	2,7	5,5

Сокращения: хлбпр - хлебные продукты, молпр - молоко и молочные продукты, мяспр - мясо и мясопродукты.

Решение задачи ЛП о минимальной коррекции специальной системы (8), преобразованной (для устранения разномасштабных величин) к виду $z_s - (e_{st} / e_t) z_t \le r$ дало значение невязки $r^* = 0{,}003$ существенно больше принятого допустимого порога 0,005, поэтому мы считаем, что система предпочтений потребителей на данном сегменте рынка неоднородна. Этот вывод согласуется с тем, что в номенклатуре выделенного сегмента рынка присутствует явно малоценный агрегат «хлебопродукты». На данном сегменте рынка рост расходов за период наблюдения (в 5,5 раза) существенно опередил наибольший рост цен (на мясопродукты - в 3,8 раза), что свидетельствует о росте реальных доходов покупателей, дефлированных по любому стандартному индексу. При этом потребление хлебопродуктов сократилось на 10%.

Решение аналогичной задачи ЛП для общей системы (19) дает значение $r^* = 0$, что позволяет принять гипотезу о существовании неоднородной функции полезности, рационализирующей статистику таблицы 1. Решение задачи КП второго этапа дает числа $\{u_t, \lambda_t\}$, по которым построены квазиинвариантные индексы $(\bar{P}_{0t}, \bar{Q}_{0t})$. Эти результаты приведены в таблице 2 вместе с пробным набором (21) и индек-

Таблица 2

Результаты построения индексов для России. 2000-2013 гг.

t*	Набор Фишера		Числа Африата		Индексы цен				Индексы количеств			
	λ_t^F	u_t^F	λ_t	u_t	π_-^{0t}	P_{0t}^F	$\bar{P}_{0t}$	π_+^{0t}	χ_-^{0t}	Q_{0t}^F	$\bar{Q}_{0t}$	χ_+^{0t}
0	1,00	13636	1,00	13636	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1	0,85	14622	0,85	14622	1,02	1,18	1,18	1,25	1,05	1,07	1,07	1,19
2	0,80	15670	0,80	15665	1,12	1,25	1,25	1,37	1,04	1,15	1,15	1,25
3	0,74	15741	0,74	15741	1,33	1,35	1,35	1,43	1,00	1,15	1,15	1,28
4	0,65	15990	0,65	15989	1,47	1,53	1,54	1,68	0,96	1,17	1,17	1,38
5	0,58	17504	0,58	17487	1,49	1,71	1,72	1,93	1,04	1,28	1,28	1,84
6	0,54	17667	0,51	17648	1,64	1,84	1,91	2,08	0,99	1,30	1,25	1,89
7	0,42	18083	0,43	18117	2,01	2,36	2,34	2,48	0,95	1,33	1,34	2,04
8	0,38	18342	0,37	18364	2,28	2,65	2,68	2,75	0,93	1,35	1,33	2,17
9	0,37	18733	0,36	18726	2,30	2,70	2,72	2,95	0,91	1,37	1,36	2,25
10	0,33	19586	0,32	19593	2,60	3,05	3,08	3,19	0,94	1,44	1,43	2,43
11	0,31	19652	0,30	19643	2,50	3,26	3,30	3,54	0,92	1,44	1,43	2,46
12	0,29	20131	0,29	20087	2,65	3,40	3,45	3,80	0,92	1,48	1,45	2,59
13	0,27	20395	0,26	20395	2,61	3,71	3,74	3,84	0,90	1,44	1,48	2,65

* t = (год - 2000).

сами Фишера и экстремальными элементарными индексами: $\pi_-^{0t} = min_i \pi_i^{st}$, $\pi_+^{0t} = max_i \pi_i^{st}$, $\chi_-^{0t} = min_i \chi_i^{st}, \chi_+^{0t} = max_i \chi_i^{st}$.

Значения индексов квазиинвариантных $\left(\bar{P}_{0t}, \bar{Q}_{0t}\right)$ и Фишера $\left(P_{st}^F, Q_{st}^F\right)$ оказались близкими (расхождения не превышают 4%). Однако квазиинвариантные индексы по определению транзитивные, в отличие от индексов Фишера. Видно, что все они ограничены снизу минимальными элементарными индексами π_-^{0t} или χ_-^{0t}, а сверху - максимальными π_+^{0t} или χ_+^{0t}. Соответственно, они фактически удовлетворяют тесту среднего.

Мы имеем ряд других примеров построения квазиинвариантных индексов по официальным данным [7, 9]. Почти всегда тест среднего выполнялся.

Заключение. Мы представили кратко наиболее существенные факты современного состояния теории потребительского спроса и аналитического направления в теории и методах построения индексов потребительских цен и количеств потребления. Это направление, заложенное работой А.А. Конюса 1924 г., до настоящего времени не заняло достойного места в сложной проблеме объективной оценки динамики социально-экономической ситуации, характеризуемой, в частности, потреблением огромной номенклатуры товаров и услуг. В отличие от используемого на практике формульно-статистического метода построения индексов спроса, аналитическое направление имеет объективный характер и теоретическую основу - аналитическую теорию потребительского рыночного спроса [3-6], соответствующую фактам, отражаемым торговой статистикой.

Литература

1. **Алле М.** Современная экономическая наука и факты // THESIS. 1994. Т. 2. Вып. 4. С. 11-19.
2. **Горбунов В.К.** Релаксационно-штрафной метод и вырожденные экстремальные задачи // Доклады АН. 2001. Т. 377. № 5. С. 583-587.
3. **Горбунов В.К.** Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004. - 174 с.
4. **Горбунов В.К.** Особенности агрегирования потребительского спроса // Журнал экономической теории. 2009. № 1. С. 85-94.
5. **Горбунов В.К.** Экономическое равновесие и агрегирование покупателей: реабилитация теоремы Вальда // Журнал экономической теории. 2011. № 3. С. 130-144.
6. **Горбунов В.К.** К теории рыночного спроса: регулярность и экономическое равновесие // Экономическая наука современной России. 2013. № 4 (63). С. 19-35.
7. **Горбунов В.К., Козлова Л.А.** Построение и исследование квазиинвариантных индексов потребления // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2008. № 3 (19). С. 120-127.
8. **Зоркальцев В.И.** Проблема агрегирования экономических субъектов // Вестник Новосибирского гос. у-та. Серия: Социально-экономические науки. 2010. Т. 10. Вып. 1. С. 107- 118.
9. **Козлова Л.А.** Алгоритмы и программы построения инвариантных и квазиинвариантных индексов потребительского спроса. Дисс.... канд. техн. наук. УлГУ: Ульяновск, 2010 .
10. **Конюс А.А.** Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономический бюллетень конъюнктурного института. 1924. № 9-10 (Переиздано в «Экономика и матем. методы», 1989. Т. 27. № 3. С. 435-444).
11. **Коротков А.В., Минашкин В.Г.** Потребительский спрос как статистический показатель // Вопросы статистики. 2014. № 7. С. 11-17.
12. **Полтерович В.М.** Кризис экономической теории // Экономическая наука современной России. 1998. № 1. С. 46-66.

13. Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. Вашингтон, МВФ. 2007.

14. Среднедушевое потребление продуктов питания, кг., РФ, городская местность, значение показателя за год. URL: http://www.gks.ru/dbscripts/cbsd/dbinet.cgi?pl=2340015 (дата обращения 30.10.2014).

15. Средние потребительские цены (тарифы) на товары и услуги, РФ. URL: http://www.gks.ru/dbscripts/cbsd/DBInetcgi?pl= 1921001 (дата обращения 30.10.2014).

16. **Afriat S.N.** The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967. Vol. 8. No 1. P. 67-77.

17. **Afriat S.N.** The Index Number Problem. Construction Theorems. Oxford: OUP, 2014. - 220 p.

18. **Kirman A.** The Economic Crisis is a Crisis for Economic Theory / / CESifo Economic Studies, 2010. Vol. 56(4). P. 498-535.

19. **Mas-Colell A., Whinston M. and Green J.** Microeconomic Theory. New York: Oxford Univ. Press. 1995. - 1018 p.

20. **Negishi T.** Elements of Neo-Walrasian Economics. A Survey (Advances in Japanese Business and Economics 5). - Tokyo: Springer, 2014.

21. **Samuelson P.A. and Swamy S.** Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis // The American Economic Review. 1974. Vol. 64. No 4. P. 566-593.

22. **Varian, H.** The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50. No. 4. P. 945-973.

23. **Varian H.** Non-parametric tests of consumer behaviour // The Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. P. 99-110.

SHAPING THE MARKET CONSUMER DEMAND AND ANALYTICAL INDICES OF DEMAND

Vladimir Gorbunov

Author affiliation: Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia). E-mail: vkgorbunov@mail.ru.

Lyubov Козлова

Author affiliation: Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia). E-mail: love792003@mail.ru.

The paper describes the essence of crisis state of the neoclassical theory of consumer demand and a way to overcome the crisis based on the concept of statistical «assembly» of consumers as an origin of the theory of aggregate market demand.

Market demand is modeled via utility maximization problem elaborated in frame of the neoclassical paradigm for an individual consumer. The nonparametric demand analysis is used for testing the adequacy of such a model to the trade statistics. Analytical index numbers of consumers' demand and their variants, invariant and quasi-invariant indices, are presented. The use of nonparametric demand analysis is based on real trade statistics of food products in the Russian Federation, and the quasi-invariant indices are constructed.

Keywords: market demand, nonparametric demand analysis, Afriat inequalities, invariant and quasi-invariant indices.
JEL: B41, C02, C43.

References

1. **Alle M.** Sovremennaya ekonomicheskaya nauka i fakty [modern economic science and facts]. *THESIS Publ.*, 1994, vol. 2, issue. 4, pp. 11-19. (In Russ.).

2. **Gorbunov V.K.** Relaksatsionno-shtrafnoy metod i vyrozhdennyye ekstremal'nyye zadachi [Relaxation-penalty method and degenerate extremal problems]. *Reports of the Academy of Sciences,* 2001, vol. 377, no. 5. pp. 583-587. (In Russ.).

3. **Gorbunov V.K.** *Matematicheskaya model' potrebitel'skogo sprosa: Teoriya i prikladnoy potentsial* [Mathematical model of consumer demand: Theory and application potential]. Moscow, Ekonomika Publ., 2004, 174 p. (In Russ.).

4. **Gorbunov V.K.** Osobennosti agregirovaniya potrebitel'skogo sprosa [Features aggregate consumer demand]. *Zhurnal ekonomicheskoy teorii,* 2009, no. 1, pp. 85-94. (In Russ.).

5. **Gorbunov V.K.** Ekonomicheskoye ravnovesiye i agregirovaniye pokupateley: reabilitatsiya teoremy Val'da [Economic equilibrium and buyers aggregation: rehabilitation of the Wald's theorem]. *Zhurnal ekonomicheskoy teorii,* 2011, no. 3, pp. 130-144. (In Russ.).

6. **Gorbunov V.K.** K teorii rynochnogo sprosa: regulyarnost' i ekonomicheskoye ravnovesiye [On the theory of market demand: regularity and economic equilibrium]. *Ekonomicheskaya nauka sovremennoy Rossii,* 2013, no. 4 (63), pp. 19-35. (In Russ.).

7. **Gorbunov V.K., Kozlova L.A.** Postroyeniye i issledovaniye kvaziinvariantnykh indeksov potrebleniya [Construction and study of quasi-invariant consumption indices]. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye,* 2008, no. 3 (19), pp. 120-127. (In Russ.).

8. **Zorkal'tsev V.I.** Problema agregirovaniya ekonomicheskikh sub"yektov [Problem of aggregation of economic subjects]. *Vestnik Novosibirskogo gos. univ. Seriya: Sotsial'no-ekonomicheskiye nauki,* 2010, vol. 10, issue.1, pp. 107-118. (In Russ.).

9. **Kozlova L.A.** *Algoritmy i programmy postroyeniya invariantnykh i kvaziinvariantnykh indeksov potrebitel'skogo sprosa*. Diss.... kand. tekhn. nauk [Algorithms and programs of construction of invariant and quasi-invariant indices of consumer demand. Cand. techn. sci. diss.]. Ulyanovsk, UlGU Publ., 2010. (In Russ.).

10. **Konyus A.A.** Problema istinnogo indeksa stoimosti zhizni [Problem of the true cost of living index]. *Ekonomicheskiy byulleten' kon'yunkturnogo instituta,* 1924, no. 9-10 (Reprinted in «Ekonomika i matem. metody», 1989, vol. 27, no. 3, pp. 435-444). (In Russ.).

11. **Korotkov A.V., Minashkin V.G.** Potrebitel'skiy spros kak statisticheskiy pokazatel' [Consumer demand as a statistical measure]. *Voprosy statistiki,* 2014, no. 7, pp. 11-17. (In Russ.).

12. **Polterovich V.M.** Krizis ekonomicheskoy teorii [Crisis of economic theory]. *Ekonomicheskaya nauka sovremennoy Rossii,* 1998, no. 1, pp. 46-66. (In Russ.).

13. Consumer price index manual: Theory and practice. New York, IMF, 2007. (In Russ.).

14. Per capita food consumption, kg., Russian Federation, urban area, value of the index for the year. Available at: http://www.gks.ru/dbscripts/cbsd/dbinet.cgi?pl=2340015 (Accessed 30.10.2014). (In Russ.).

15. Average consumer prices (tariffs) for goods and services, Russian Federation. Available at: http://www.gks.ru/dbscripts/cbsd/DBInet.cgi?pl=1921001 (Accessed 30.10.2014). (In Russ.).

16. **Afriat S.N.** The construction of utility functions from expenditure data. *International Economic Review,* 1967, no.l. 8. no. 1. pp. 67-77.

17. **Afriat S.N.** *The Index Number Problem. Construction Theorems*. Oxford: OUP, 2014. - 220 p.

18. **Kirman A.** The Economic Crisis is a Crisis for Economic Theory/ CESifo Economic Studies, 2010. vol. 56(4). pp. 498-535.

19. **Mas-Colell A., Whinston M. and Green J.** *Microeconomic Theory*. New York: Oxford Univ. Press. 1995. -1018 p.

20. **Negishi T.** *Elements of Neo-Walrasian Economics*. A Survey (Advances in Japanese Business and Economics 5). - Tokyo: Springer, 2014.

21. **Samuelson, P.A. and Swamy, S.** Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis. *The American Economic Review,* 1974, vol. 64. No 4. pp. 566-593.

22. **Varian H.** The nonparametric approach to demand analysis. *Econometrica*, 1982. vol. 50. no. 4. pp. 945-973.

23. **Varian H.** Non-parametric tests of consumer behaviour. *The Review of Economic Studies*, 1983. vol. 50. pp. 99-110.