

МЕТОДОЛОГИЯ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЕНЕЖНЫХ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ*

И.Б. Колмаков

В настоящее время для оценок дифференциации денежных доходов населения используются в основном два показателя: коэффициент фондов и индекс Джини. Обладая определенной информативностью, они тем не менее не лишены недостатков.

В статье описывается методология расчета и анализа дифференциации денежных доходов населения (наряду с традиционными показателями – коэффициентом фондов и индексом Джини) на основе интегральных оценок показателей поляризации денежных доходов населения. При гипотезе логарифмически нормального распределения населения методология расчета параметров модели распределения реализуется традиционно – по отчетным данным Росстата.

Автор считает, что для измерения масштабов расслоения населения по уровню денежных доходов, наряду с известными показателями, целесообразно использовать показатели поляризации денежных доходов. В качестве границы поляризации принимается величина среднего дохода в распределении. Рассматриваются численность и доходы населения с доходами ниже и выше среднего уровня. В каждой из этих групп вычисляются удельные значения доходов и сравниваются между собой. В статье приведены определения показателей поляризации, методология и примеры их расчета. Впервые удалось показать, что для логарифмически нормального распределения доля доходов населения с доходами ниже среднего уровня в точности равна доле численности населения с доходами выше среднего уровня. Из доказательства этого утверждения следует справедливость обратного утверждения: для логарифмически нормального распределения доля доходов населения с доходами выше среднего уровня в точности равна доле численности населения с доходами ниже среднего уровня.

Показатель – индекс поляризации – определяется арифметическими операциями с единственным значением стандартной функции – любой долей численности или доходов населения с доходами ниже или выше среднего уровня. Установлена траектория движения этого показателя в координатах: доли населения – доли доходов. Индекс поляризации отличается от индекса Джини ясностью экономической трактовки, простотой и точностью вычисления. Более того, индекс поляризации можно рассчитывать с учетом доходов «обездоленных» групп населения. Показано, что наряду с использованием индекса поляризации, имеет смысл рассчитывать обратную величину, интерпретируемую как критерий поляризации.

Ключевые слова: распределение населения по уровню денежных доходов, логарифмически нормальное распределение населения, поляризация денежных доходов населения, индекс поляризации, фундаментальная связь логарифма дисперсии дохода логарифмически нормального распределения с долей населения с доходами ниже среднего уровня, траектория движения индекса поляризации, методы расчета показателей поляризации.

JEL: C4, C46, D3, D31

В публикациях Росстата для оценок уровня дифференциации денежных доходов населения используются в основном два показателя: коэффициент фондов и индекс Джини. Хотя содержание этих показателей не требует пространных комментариев, поскольку они описаны в справочниках по статистике и отражены в методологических документах Росстата [7], расчеты этих показателей нуждаются в пояснениях.

В официальной статистике сегодня используется два канала измерения денежных доходов

населения: выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств и косвенные оценки денежных доходов населения по данным макроэкономических измерений.

Коэффициент фондов

Коэффициент фондов является наиболее простой характеристикой дифференциации доходов. Он измеряет соотношение между доходами сравниваемых групп населения с разными доходами, но с равной численностью населения.

Колмаков Игорь Борисович (kolibor@rambler.ru) – д-р экон. наук, профессор кафедры информатики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова.

* Настоящее исследование проведено в рамках работ, выполняемых по гранту РФФИ № НК 13-07-0085814.

Автор выражает благодарность Т.Б. Великановой за обсуждение проблем методологии расчетов оценок расслоения населения по уровням денежных доходов.

Децильный коэффициент фондов показывает отношение фонда доходов, приходящегося на 10% наиболее богатого населения, - D_{10} , и фонда доходов, приходящегося на 10% самого бедного населения, - D_1 :

$$KF_{10} = D_{10} / D_1. \quad (1)$$

Так как формально этот показатель определяет отношение доходов групп равной численности, то он еще имеет смысл отношения средних удельных доходов населения в самой высокодоходной группе к средним удельным доходам населения в самой низкодоходной группе.

Отражая отношение удельных доходов крайних групп населения, коэффициент фондов KF_{10} является наиболее индикативным критерием дифференциации. Однако практически, несмотря на кажущуюся простоту определения, доверие к трактовке и точности расчетов коэффициента фондов очень низкое. Объясняется этот феномен тремя причинами:

1. Методологической - какая группа населения на самом деле самая низкодоходная? - вопрос остается открытым.

2. Низкой точностью исходных данных (или точностью экспертных оценок).

3. Конструкцией самой формулы вычисления коэффициента фондов.

В действительности не существует ни методов, ни исходной информации для прямого измерения величин D_1 и D_{10} .

Коэффициент фондов KF_{10} можно определять по функциям распределения численности и доходов населения. Для этого следует вычислить величины денежных доходов первой и последней децильных групп населения, выраженные в относительных единицах.

Доля доходов, соответствующая *первой децильной группе* населения, находится из выражения:

$$L_1(0 < x < x_1) = \frac{1}{X_c} \int_0^{x_1} uf(u)du, \quad (2)$$

где X_c - среднедушевой доход во всем диапазоне доходов, $f(u)$ - плотность распределения населения по уровню денежных доходов.

$$X_c = \int_0^{\infty} x dF(x), \quad (3)$$

где $F(x)$ - функция распределения населения по уровню денежных доходов.

Доля доходов, соответствующая *последней децильной группе* населения:

$$L_{10}(x_9 < x < \infty) = \frac{1}{X_c} \int_{x_9}^{\infty} uf(u)du. \quad (4)$$

Коэффициент фондов KF_{10} в такой редакции равен $KF_{10} = L_{10}/L_1$.

Числитель определяется досчетом доходов высокодоходных групп с учетом экспертных оценок. Точность расчета числителя зависит от квалификация экспертов, качества и объема доступной им косвенной информации.

Знаменатель определяет доходы самой низкодоходной группы населения D_1 . В качестве показателя «доходы самой низкодоходной группы населения» в официальной отчетности используется одна из возможных трактовок, а именно: результаты выборочного обследования с экспертной оценкой. Эта величина сравнительно мала.

На самом деле известно, что существует группа обездоленного населения [9]. Вариант математического описания доходов этой группы приведен в [4]. Милтон Фридмен, исследуя в 1967 г. доходы жителей г. Чикаго, впервые «...сформулировал концепцию так называемых “отрицательных налогов”, эффективную для тех, семейный доход которых находится за чертой бедности...» [13]. Обездоленное население в большинстве своем не имеет ни дома, ни хозяйства, но каким-то образом выживает. Выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств оставляет за пределами обследования обездоленных. У этих 5-7% населения нет «домашних хозяйств» [9, 4]. С учетом «отрицательных доходов» обездоленных использование коэффициента фондов в трактовке как «...отношение к фонду доходов самых низкодоходных групп населения» вообще теряет смысл.

Что же на самом деле происходит при вычислении коэффициента фондов в общепринятой трактовке? Небольшие колебания величины знаменателя приводят в итоге к большим колебаниям в определении величины KF_{10} . В математически правильной записи, с учетом точности исходной информации, выражение для KF_{10} примет вид:

$$KF_{10}(1 \pm \delta) = \frac{D_{10}(1 \pm \delta_{10})}{D_1(1 \pm \delta_1)}. \quad (5)$$

Разброс допустимых значений $KF_{10} (1 \pm \delta)$ настолько велик, что использование этого показателя в формате с тремя значащими цифрами в аналитической работе становится весьма сомнительным. Действительно, пусть точность определения числителя $\delta_{10} = (3 \div 5)\%$ (это очень высокая точность для такого показателя). Точность определения знаменателя $\delta_1 = (3 \div 5)\%$ - тоже очень высокая. Пусть среднее значение KF_{10} равно 14,0. Тогда при заданной точности числителя и знаменателя точность δ составит $\pm 10,5\%$. Вряд ли какую-либо ценность имеет третья значащая цифра в этом показателе, записанном математически верно как $KF_{10} = (14,0 \pm 1,4)$ или $KF_{10} = (12,6 \div 15,4)$. Другие виды записи этого показателя без указания диапазона точности вычисления являются бездоказательными. Приходится признать, что публикуемый коэффициент фондов KF_{10} относится к классу именно таких показателей. Поэтому поиск экономического содержания в колебаниях третьего знака в показателе KF_{10} лишен всякого смысла при существующей точности в системах измерений исходной информации. Этот показатель может применяться только как очень грубый индикатор на уровне не далее второго знака. (И только с экспертными комментариями: например, почему ближе к 15, чем к 13, или наоборот.)

Методы перехода от распределения населения по уровню среднедушевых доходов к кривой концентрации Лоренца

Дифференциация денежных доходов населения оценивается по кривой Лоренца, которая строится в координатах (F, D) - доли населения, доли дохода.

Диагональ квадрата $[(0,0), (1,1)]$ определяет линию абсолютного равенства. Отклонение кривой Лоренца от линии абсолютного равенства определяет дифференциацию денежных доходов. Оценка удвоенной площади ограниченной кривой Лоренца и линией абсолютного равенства называется индексом Джини. Величина индекса Джини количественно определяет дифференциацию денежных доходов.

Чтобы осуществить переход к распределению Лоренца и поставить в соответствие координатам распределения дохода координаты кривой Лоренца, поступают следующим образом. Вычисляют функцию Лоренца $L(u)$:

$$L(u) = \Psi(x(u)) = (1/X_c) \int_0^{x(u)} x dF(x) = \\ = (1/X_c) \int_0^{x(u)} x f(x) dx \quad L(u) \in [0,1]$$

для аргумента

$$u = F(x(u)) = \int_0^{x(u)} dF(x) = \int_0^{x(u)} f(x) dx \\ u \in [0,1],$$

где $x(u)$ - квантиль порядка u распределения $F(x)$.

Следовательно, чтобы получить кривую Лоренца, необходимо иметь функцию распределения долей численности населения $F(x)$ (относительной величины накопленной численности населения) и функцию распределения долей доходов населения $\Psi(x)$ (относительной величины накопленного дохода населения) для одной и той же оси дохода X . Для выбранной определенным способом величины дохода X_j получают значения пары $[u_j, L(u)_j]$, которая и определяет j -ю координату кривой Лоренца. Для удобства последующих преобразований введем обозначения: $F(X_j) = u_j$ - относительная величина накопленной доли численности населения - абсцисса кривой Лоренца; $\Psi(X_j) = L(u)_j$ - соответствующая относительная величина накопленного дохода населения - ордината кривой Лоренца.

Коэффициент концентрации Лоренца (индекс Джини - ID). Коэффициент концентрации Лоренца вычисляется не по двум или нескольким дискретным точкам распределения, а по всей кривой - точкам всего ряда. Кривая Лоренца отличается не только наглядностью, но и позволяет подсчитать дифференциацию распределения доходов через величины площади между кривой Лоренца и границами крайних вариантов. Площадь между прямой «абсолютного равенства» и кривой Лоренца обозначим SA , а площадь под кривой Лоренца - SB . Тогда

$$SA + SB = 0,5, \quad \text{или} \quad 2(SA + SB) = 1.$$

Индекс Джини (ID) определяется как удвоенная площадь (чтобы нормировать к единице) между кривой Лоренца и прямой «абсолютного равенства»:

$$ID = 2SA = 1 - 2SB \quad 0 < SA < 0,5; \\ 0 < ID < 1. \quad (6)$$

Чем больше дифференциация распределения доходов, тем дальше кривая отстоит от диагональной прямой, тем меньшая величина вычитается из единицы и тем больше коэффициент концентрации. Для равномерного распределения в случае полного равенства $ID = 0$. В случае полного неравенства $ID = 1$.

Основная рабочая формула для расчета индекса Джини принимает вид:

$$ID = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} (L_j + L_{j+1})(u_{j+1} - u_j),$$

где $(u_{j+1} - u_j)$ - доля населения, относящаяся к j -му интервалу; L_j, L_{j+1} - доли доходов, приходящиеся на начало и конец j -го интервала.

Для равномерных интервалов практически для подсчета площади под кривой Лоренца используется формула:

$$SB = \int_0^1 L(u) du \approx \Delta(0,5 + \sum_{j=1}^{n-1} L_j) \\ 0 < SB < 0,5 \quad u \in [0,1]. \quad (7)$$

Здесь Δ - квантование оси абсцисс $\Delta = 0,1$, или $\Delta = 0,2$, или другое значение (в зависимости от того, ведется ли расчет по децильным, квинтильным или другим группам деления оси абсцисс); L_j - значения внутренних точек кривой Лоренца.

Для равномерных интервалов с учетом (7) формула (6) для расчета индекса Джини принимает вид [2]:

$$ID \approx 1 - \Delta - 2\Delta \sum_{j=1}^{n-1} L_j. \quad (8)$$

В этой формуле расчетное значение индекса Джини ID меньше фактического на величину погрешности, обусловленной заменой площади под плавной кривой Лоренца набором площадей соответствующих трапеций. Площадь под кривой SB при таком способе расчета получается завышенной и, соответственно, площадь SA - заниженной. Величина погрешности зависит от величины кванта Δ .

Очевидно, что первоисточником определения показателя индекса Джини является функция распределения населения $F(x)$. Р. Лерман и Ш. Ицхаки [15, 16] предложили формулу, по которой индекс Джини вычисляется непосредственно по функции распределения $F(x)$:

$$ID = (2/X_c) \cdot cov_F(x, F(x)), \quad (9)$$

где X_c - среднедушевой доход во всем диапазоне доходов (3); $cov_F(x, F(x))$ - ковариация между уровнем дохода x и долей $F(x)$ - населения с доходами на душу не выше, чем x , рассматриваемыми как случайные переменные с одной и той же функцией распределения $F(x)$:

$$cov_F(x, F(x)) = \int_0^\infty (x - X_c)(F(x) - F_c) dF(x).$$

Доказывается формула (9) весьма просто. Используя стандартные определения индекса Джини (6) и (7), можем записать:

$$ID = 1 - 2 \int_0^1 L(u) du = 1 - (2/X_c) \int_0^1 \int_0^{x(u)} x dF(x) du, \quad (10)$$

где $L(u) = (1/X_c) \int_0^{x(u)} x dF(x)$ - функция Лоренца, а $x(u)$ - квантиль порядка u распределения $F(x)$.

Интегрируя по частям первый из интегралов в двойном интеграле и выполнив подстановку $u = F(x(u))$, $x = x(u)$, получим:

$$\int_0^1 \int_0^{x(u)} x dF(x) du = X_c - \int_0^1 u x(u) dF(x(u)) = X_c - \\ - \int_0^\infty x F(x) dF(x) = X_c / 2 - \int_0^\infty (x - X_c)(F(x) - 0,5) dF(x) = \\ = X_c / 2 - cov_F(x, F(x)).$$

Подстановка последнего выражения в формулу (10) дает (9).

Индекс Джини является более универсальным показателем неравенства в доходах, чем коэффициент фондов. Он полностью учитывает разброс значений признака вариационного ряда, в то время как коэффициент фондов учитывает только разрыв, складывающийся между крайними децильными группами. Обзор многочисленных индексов и критериев дифференциации доходов населения, методы их вычисления и результаты анализа применения приведены во многих источниках (см., например, [12, 11, 16, 2]).

В действительности кривая Лоренца обладает значительно большей информативностью, чем та, которая использовалась до настоящего времени. Потенциал свойств кривой Лоренца позволяет дополнительно получать характеристики дифференциации денежных доходов населения не менее информационно емкие, чем коэффициент фондов или индекс Джини, и более точные. Су-

ществует серия простых, но очень информативных характеристик дифференциации доходов населения, не применявшихся ранее. Назовем эти характеристики *полярными* и исследуем их применительно к логарифмически нормальному распределению.

Достаточно «удачно» выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств охватывает и представляет группы бедного населения, малоимущих и частично (примерно половину) среднего класса. Если проследить публикуемые Росстатом данные за последние 15-18 лет распределения населения по уровню денежных доходов, то обнаруживается четкая закономерность: поведение 63-65% населения с совокупными денежными доходами в объеме 37-35% может быть «достаточно хорошо» описано логарифмически нормальным распределением [1, 7, 3, 6, 8].

Логарифмически нормальное распределение

Плотность вероятностей для этого закона имеет математическое выражение, как и для нормального распределения, с той лишь разницей, что вместо случайной величины y берется ее логарифм $\ln y$ и параметры μ и σ^2 (математическое ожидание и дисперсия) исчисляются соответственно для $\ln y$. Иными словами, случайная переменная y имеет логарифмически нормальное распределение с параметрами μ и σ^2 , если случайная переменная $x = \ln y$ имеет нормальное распределение с теми же параметрами μ и σ^2 . Для кривой плотности вероятностей логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевых денежных доходов (СДД)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (11)$$

имеет правостороннюю асимметрию, которая тем сильнее, чем больше значения параметров μ и σ^2 . Каждая кривая имеет один максимум и является положительно определенной для всех положительных значений x .

Важнейшей индикативной характеристикой логнормального распределения является *мода* - модальное значение среднедушевого дохода, то есть то значение дохода, при котором функция плотности распределения достигает своего максимального значения. Очевидно, что $f'(X_{mod}) = 0$. Такое значение производной достигается при

$$X_{mod} = \exp(\mu - \sigma^2). \quad (12)$$

Другой важнейшей индикативной характеристикой логнормального распределения является *среднее значение*. Вычисление математического ожидания случайной переменной с логарифмически нормальным распределением не составляет особых трудностей. X_c - первый момент случайной величины x , распределенной по логарифмически нормальному закону распределения:

$$X_c = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}. \quad (13)$$

Между модальным значением (X_{mod}) и средним (X_c) существует параметрическая связь:

$$k_x = (X_c / X_{mod}) = e^{\frac{3}{2}\sigma^2}. \quad (14)$$

Уже сама величина этого отношения говорит об очень многом: чем выше значение k_x (то есть чем выше значение дисперсии логарифма дохода), тем выше степень неравномерности доходов и выше степень расслоения общества.

Уравнения (12) и (13) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными μ и σ . Решая эту систему относительно μ и σ , получаем, что

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3} \ln k_x} = \sqrt{\frac{2}{3} (\ln X_c - \ln X_{mod})}; \quad (15)$$

$$\mu = (1/3) \ln(X_{mod} X_c^2), \quad (16)$$

то есть существует возможность определять плотность распределения населения по уровню среднедушевого дохода через два параметра - X_c и X_{mod} , имеющих явный экономический смысл:

X_c - математическое ожидание; по экономическому смыслу соответствует значению среднедушевого среднемесячного денежного дохода в генеральной совокупности, определяемому по доле денежных доходов населения в ВВП и среднегодовой численности населения;

X_{mod} - модальное значение среднедушевого среднемесячного денежного дохода в генеральной совокупности, соответствующее доходам наиболее многочисленной группы населения. Ретроспективно определяется на основе данных выборочного обследования. Расчетный прогноз (или экспертная оценка прогноза) производится на основе прогноза показателей структуры баланса денежных доходов и расходов населения [3].

На самом деле, достаточно иметь любую пару значений из четырех (X_{mod} , X_c , μ и σ), чтобы

определить другую пару значений. Пусть, например, известна пара X_c и μ . Тогда из (12) и (13) следует

$$X_{mod} = X_c^{-2} \cdot e^{3\mu} \quad \text{и} \quad \sigma^2 = 2 \ln X_c - 2\mu. \quad (17)$$

Если известна пара X_c и σ^2 , то из (12) и (13) следует

$$X_{mod} = X_c e^{-\frac{3}{2}\sigma^2} \quad \text{и} \quad \mu = \ln X_c - 0,5\sigma^2. \quad (18)$$

Интегральной характеристикой плотности вероятностей логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевых денежных доходов является функция распределения накопленных долей численности населения

$$F(0 < x) = F(x) = \int_0^x f(u) du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du. \quad (19)$$

Наряду с распределением численности населения, рассмотрим распределение доходов населения. Кривая распределения (плотность вероятности распределения) доходов населения по уровню среднедушевого среднемесячного денежного дохода - функция $\chi(x)$ - имеет вид:

$$\chi(x) = x f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (20)$$

Выражение (20) дает распределение (плотность вероятности распределения) доходов населения по уровню среднедушевого среднемесячного денежного дохода в денежном выражении. Для того чтобы выразить распределение доходов населения по уровню СДД [функцию $\varphi(x)$] в относительных единицах, необходимо произведение $x f(x)$ нормировать к X_c . Величина параметра нормировки X_c - среднего значения СДД - была определена в (13).

Тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{X_c} \chi(x) = \frac{1}{X_c} x f(x) = \frac{1}{X_c \sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (21)$$

Накопленные доли доходов населения по уровню среднедушевого среднемесячного денежного дохода есть функция $\Psi(x)$ или интеграл:

$$\Psi(0 < x) = \Psi(x) = \int_0^x \varphi(u) du = \frac{1}{X_c \sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du. \quad (22)$$

Применение именно этих функций $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$ принципиально необходимо для точного решения задач поляризации доходов населения.

Поэтому наряду с уже исследованными свойствами функции $f(x)$, столь же подробно исследуем функцию $\varphi(x)$ (21) и определим для этой функции свойственные ей координаты индикативных точек.

Найдем $X_{\varphi mod}$ из условия $\varphi'(x) = 0$. Получаем

$$X_{\varphi mod} = e^{\mu} = X_{med}. \quad (23)$$

Найдем значение функции $\varphi(X_{med}) = \varphi(X_{\varphi mod}) = \varphi(e^{\mu}) = \varphi_{max}$

$$\varphi(X_{\varphi mod}) = \frac{1}{X_c \sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma^2}}. \quad (24)$$

Вычислим математическое ожидание $M_{\varphi 0}$ случайной величины x , распределенной по закону распределения $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} X_{\varphi c} = M_{\varphi 0} &= \frac{1}{X_c \sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} x dx = e^{\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} = \\ &= X_c e^{\sigma^2} = X_{\varphi mod} e^{\frac{3}{2}\sigma^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) следует, что между $X_{\varphi mod}$ и $X_{\varphi c}$ существует точно такая же параметрическая связь, как и между X_{mod} и X_c :

$$k_{x\varphi} = \frac{X_{\varphi c}}{X_{\varphi mod}} = e^{\frac{3}{2}\sigma^2} = k_x. \quad (26)$$

Восстановление параметров распределения по отчетным данным функции распределения.

Покажем на примере распределения населения по уровню денежных доходов за 2013 г., опубликованных Росстатом, вычисление параметров распределения. Используются данные о распределении населения по размеру среднемесячного среднедушевого денежного дохода. Расчеты выполнены по известной методике. Рассматриваемый способ определения параметров логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевого дохода сводится к отысканию параметра σ из публикуемых Росстатом данных [10], содержащих сведения о функции распределения в следующем виде. Для диапазона дохода (от левой границы X_j до правой границы X_{j+1}) приводится доля населения, имеющего доход в этом диапазоне [приращение функции распределения $\Delta F(X_j)$]. Математически это означает, что диапазону доходов (от 0 до X_j) ставится в соответствие значение функции логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевого дохода

$F(0 < x < X_i)$ как накопленной сумме долей численности [приращениям функции распределения $\Delta F(X_i)$] со всеми доходами (от 0 до X_i):

$$F(0 < x < X_i) = \sum_i \Delta F(X_i) = F(X_i).$$

Предполагается, что публикуемые отчетные данные - функция распределения $F(X_i)$ и ее приращения $\Delta F(X_i)$ - могут быть аппроксимированы двухпараметрическим логарифмически нормальным распределением [7, с. 79; 3, с. 20]. Один из параметров - среднее значение душевого денежного дохода X_c - всегда известен. Для определения второго параметра - среднеквадратического отклонения логарифма доходов - используется теоретически известная связь параметров логарифмически нормального распределения с параметрами нормированной функции Лапласа. Действительно, если к функции логарифмически нормального распределения $F(X_i)$

$$F(X_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_i} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_i} \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

применить замену переменной

$$z = (\ln u - \mu)/\sigma \quad (27)$$

и учесть, что $dz = \frac{1}{\sigma u} du$, то получаем нормированную функцию Лапласа $\Phi(Z_i) = F(X_i)$:

$$F(X_i) = \Phi(Z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_i} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Нормированная функция Лапласа приводится во многих монографиях, справочниках и программных продуктах (например, *Microsoft Excel*). Это позволяет решать как прямые задачи: отыскание $\Phi(Z_i)$ по известному значению Z_i , так и обратные задачи: отыскание Z_i по известному значению $\Phi(Z_i)$.

Нас интересует обратная задача. В *Microsoft Excel* существует функция НОРМСТОБР(Φ), которая по известному значению $\Phi(Z_i) = F(X_i)$ выдает значение аргумента Z_i . Связь между Z_i и параметрами μ и σ устанавливается уравнением (27). Исключим из этого уравнения параметр μ , заменив его известным средним значением среднедушевого дохода X_c , которое вычисляется по отчетным макропоказателям и среднегодовой численности населения. Среднее значение

среднедушевого денежного дохода определяется параметрами логнормального распределения $X_c = \exp(\mu + 0,5\sigma^2)$, из чего следует, что

$$\mu = \ln X_c - 0,5\sigma^2. \quad (28)$$

Подставляя выражение для μ из (28) в (27), получим:

$$Z_i = (\ln X_i - \ln X_c + 0,5\sigma^2)/\sigma_i.$$

Учитывая, что параметр $\sigma_i \neq 0$, это уравнение преобразуется к приведенному квадратному уравнению относительно параметра σ_i :

$$\sigma_i^2 - 2\sigma_i Z_i - 2\ln(X_c/X_i) = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения дает значение параметра σ_i :

$$\sigma_i = Z_i \pm \sqrt{Z_i^2 + 2\ln(X_c/X_i)}.$$

Экономический смысл имеет только положительное значение корня. Теперь, когда нам известно значение параметра σ , из уравнения (28) находим μ , а затем вычисляем X_{mod} , что и дает полное решение задачи идентификации параметров распределения по известным значениям функции распределения. Расчеты фактических параметров отчетных распределений по данным Росстата за 2013 г. дают значения, близкие к следующим: $\sigma = 0,7748...$; $\mu = 9,845...$

Полученные усредненные параметры μ и σ отчетных значений распределений позволяют получать количественные оценки многих других параметров и показателей, необходимых для решения аналитических задач отчетных периодов и проблем прогнозирования показателей дифференциации и поляризации денежных доходов населения [3].

Полярные характеристики дифференциации доходов населения. Определения и примеры применения

Социальная устойчивость общества среди множества критериев и индексов определяется численностью и доходами «среднего класса». Из двух вышеприведенных официально используемых характеристик дифференциации доходов - коэффициента фондов и индекса Джини - никак не следуют характеристики «среднего класса», кроме очевидного утверждения: «...чем меньше индекс Джини, тем выше численность «сред-

него класса». В процессе обсуждений проблем социальной устойчивости общества настоятельно выявлялась необходимость иметь такие характеристики доходов, которые позволяли бы оценивать дифференциацию относительно средних доходов населения.

Если средний доход X_c считать границей раздела доходов населения, то логично рассматривать характеристики тех, кто имеет доходы выше среднего уровня, и характеристики тех, кто имеет доходы ниже среднего уровня, и сравнивать их между собой. Поскольку эти характеристики полярно отличаются по знаку оцениваемых параметров, то назовем их **полярными**. При разработке полярных характеристик доходов требования к ним были весьма простые: не противоречить общепринятым, не заменять, а дополнять их, отличаться простотой и ясностью трактовки и вычисления. Само понятие **поляризации** денежных доходов общества не является новым и широко использовалось уже в работах Н.М. Римашевской [9]. Хотя математического определения понятия поляризации денежных доходов там не предлагалось и количественные оценки поляризации не использовались, но определения, экспертный анализ и выводы были весьма убедительными.

Определения характеристик поляризации денежных доходов населения. Отметим тот факт, что максимальное удаление кривой Лоренца от прямой «абсолютного равенства» достигается в точке среднего дохода X_c . В этой точке касательная к кривой Лоренца параллельна прямой «абсолютного равенства» и, следовательно, в этой точке производная $(F(u) - D(u))'_u = 0$. Докажем это утверждение. С этой целью построим разность $DFD(x)$ функций $F(x)$ и $D(x)$:

$$(F(u) - D(u)) = DFD(x) = F(x) - D(x) = \int_0^x f(v)dv - \int_0^x \varphi(v)dv = \int_0^x (f(v) - \varphi(v))dv. \quad (29)$$

Для того чтобы найти максимум этой разности, вычислим производную функции $DFD(x)$ и, приравняв ее нулю $[DFD(x)]'_x = 0$, найдем координату x , в которой достигается это равенство. Производная выражения (29) по x дает условие $f(x) - \varphi(x) = 0$, которое удовлетворяется в единственной точке $x = X_c$. Действительно, в этой точке $\varphi(X_c) = \frac{1}{X_c} X_c f(X_c) = f(X_c)$ и значения функций $\varphi(X_c)$ и $f(X_c)$ совпадают. Этот вывод доказывает фундаментальное утверждение:

Для логарифмически нормального распределения наибольшая разность функций $F(x)$ и $\Psi(x)$ (функций долей численности и долей доходов населения) достигается в точке среднего дохода (при $x = X_c$)

$$\max | (F(u) - D(u)) |_u = \max | F(x) - D(x) |_{x=X_c} = DFD(X_c). \quad (30)$$

Экономически это условие выявляет **границу поляризации доходов** и определяет, какая часть населения имеет доходы ниже среднего уровня и какой частью доходов владеет. Для России, например, этот показатель означает, что если 67% населения имеют доход ниже среднего уровня, то владеют в целом 33% дохода. Этот же показатель означает, что в то же самое время 33% населения имеют доход выше среднего уровня и владеют 67% дохода. Эти показатели не менее емко характеризуют дифференциацию доходов, чем индекс Джини и коэффициент фондов. Поэтому предлагается, наряду с уже используемыми показателями дифференциации, рассматривать новый показатель: **индекс поляризации доходов населения - IKL**.

Индекс поляризации доходов населения определяется как отношение среднего дохода в высокодоходной группе к среднему доходу в низкодоходной группе. Прежде чем рассматривать индекс поляризации доходов, остановимся на нескольких дополнительных характеристиках поляризации доходов населения, которые играют вспомогательную роль, но оказываются простыми и полезными при вычислении **IKL**. К дополнительным характеристикам поляризации отнесем:

1. Координаты поляризации доходов населения $[F_c, D_c, DFD(X_c)]$.
2. Поляризатор населения **KNL**.
3. Поляризатор доходов **KDL**.

Рассмотрим каждую из этих характеристик.

1. **Координаты поляризации доходов населения:** $F_c, D_c, DFD(X_c)$.

Весьма просто можно получить оценку численности населения с доходами ниже (или выше) среднего уровня. Строим функцию:

$$DFD(u) = F(u) - D(u); \\ F(u) \in [0,1] \quad D(u) \in [0,1] \quad DFD(u) \in [0,1].$$

Затем находим ее экстремум, то есть ту величину U_s , при которой

$$dDFD(U_s)/du = 0.$$

Величина U_s определяет экстремум функции DFD и показывает, какая доля населения имеет доходы

ниже среднего уровня. В частном случае, для логарифмически нормального закона распределения выше (30) было доказано, что экстремум функции DFD достигается в точке среднего дохода X_c . Точное значение $F_c(X_c)$ определяется соответствующим значением стандартной нормированной функции Лапласа Φ_c . Для этого используется теоретически известная связь параметров логарифмически нормального распределения с параметрами нормированной функции Лапласа Φ_c . Если к функции логарифмически нормального распределения $F_c(X_c)$

$$U_s = U_c = F_c(X_c) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_c} \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

применить замену переменной $v = (\ln u - \mu)/\sigma$ при $dv = \frac{1}{\sigma u} du$ и учесть, что в точке среднего дохода $X_c = \exp(\mu + 0,5\sigma^2)$ и $v = (\mu + 0,5\sigma^2 - \mu)/\sigma = 0,5\sigma$, то получим, что

$$F_c(X_c) = \Phi_c(0,5\sigma). \quad (31)$$

Характеристика $F_c(X_c)$ сама по себе очень информативна. Величина $F_c(X_c)$ для логарифмически нормального распределения при $\sigma > 0$ всегда больше 0,5:

$$0,5 < F_c(X_c) < 1,0.$$

Если $F_c(X_c)$ - оценка доли населения с доходами ниже среднего уровня X_c , то $1 - F_c(X_c)$ - оценка доли населения с доходами выше среднего уровня X_c . Графики функций $F_c(X_c)$ и $1 - F_c(X_c)$ приведены на рис. 1.

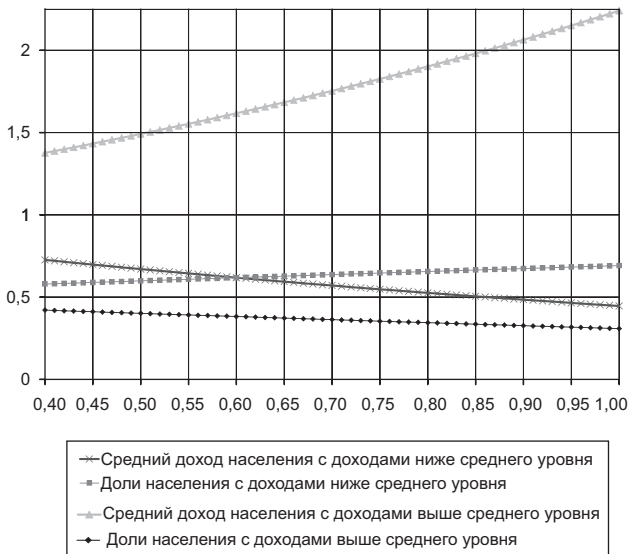


Рис. 1. Графики поведения функции $F_c(X_c)$ - доли населения с доходами ниже среднего уровня и функции $1 - F_c(X_c)$ - доли населения с доходами выше среднего уровня в диапазоне $0,4 < \sigma < 1,0$

Чтобы получить оценку доходов населения с доходами ниже X_c для координаты $D(X_c) = D_c$, найдем соответствующее значение дохода. В частном случае для двухпараметрического логарифмически нормального закона распределения известно, что доля объема денежных доходов населения с доходами до X_c составит:

$$D_c = \Psi(X_c) = \int_0^{X_c} \varphi(v) dv = \frac{1}{X_c \sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{X_c} e^{-\frac{(\ln v - \mu)^2}{2\sigma^2}} dv. \quad (32)$$

Интеграл (32) может быть вычислен с помощью стандартных функций. В Microsoft Excel это функция НОРМ.СТ.РАСП. При замене переменной

$$t = \frac{\ln v - \mu}{\sigma} - \sigma \quad (33)$$

и, учитывая, что $dt = \frac{1}{\sigma v} dv$, $\ln v_c = \mu + 0,5\sigma^2$, а $t = -0,5\sigma$, интеграл D_c переводится в нормированную функцию Лапласа $\Phi(-0,5\sigma)$:

$$\Phi(-0,5\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-0,5\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

И тогда

$$D_c = \Psi(X_c) = \Phi(-0,5\sigma). \quad (34)$$

Характеристика $D_c(X_c)$ не менее информативна, чем $F_c(X_c)$. Величина $D_c(X_c)$ для логарифмически нормального распределения при $\sigma > 0$ всегда меньше 0,5:

$$0 < D_c(X_c) < 0,5.$$

Из свойств функции $\Phi(z)$ известно, что $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, то есть $\Phi(-0,5\sigma) = 1 - \Phi(0,5\sigma)$. Но ранее в (31) было доказано, что $\Phi(0,5\sigma) = F_c(X_c)$.

Отсюда следует, что

$$D_c(X_c) = 1 - F_c(X_c). \quad (35)$$

Утверждение (35) носит фундаментальный характер. Доказано важнейшее свойство логарифмически нормального распределения:

Доля доходов населения с доходами ниже среднего уровня в точности равна доле численности населения с доходами выше среднего уровня.

Отсюда с неизбежностью следует симметричное фундаментальное утверждение:

Доля доходов населения с доходами выше среднего уровня в точности равна доле численности населения с доходами ниже среднего уровня.

То есть

$$1 - D_c(X_c) = F_c(X_c). \quad (36)$$

Максимум доли накопленного дефицита доходов групп населения с доходами ниже среднего уровня DF_c достигается в точке среднего дохода X_c :

$$DF_c = F_c - D_c.$$

Здесь DF_c - дефицит доли дохода групп населения с доходами ниже среднего уровня, или иначе DF_c - перераспределенная доля дохода. Подставив в выражение для DF_c значение D_c из (35), получим

$$DF_c = F_c - (1 - F_c) = 2F_c - 1. \quad (37)$$

Именно величина DF_c - перераспределенная доля дохода, равная $2F_c - 1$, дает еще одну оценку расслоения общества и показывает, какая доля денежных доходов оказалась «делегированной» от низкодоходных групп к высокодоходным группам.

2. *Поляризатор населения KNL*. Определяется отношением численности населения с доходами ниже среднего уровня (DN_H) к численности населения с доходами выше среднего уровня (DN_B):

$$KNL = DN_H / DN_B.$$

Так как отношение численности низкодоходных и высокодоходных групп при нормировке к общей численности населения соответствует отношению долей этих групп, то *поляризатор населения* определяется соотношением:

$$KNL = \frac{F_c}{1 - F_c} = \frac{1 - D_c}{D_c}. \quad (38)$$

3. *Поляризатор доходов KDL*. Этот показатель определяется отношением доходов населения с доходами выше среднего уровня (DDN_B) к доходам населения с доходами ниже среднего уровня (DDN_H):

$$KDL = DDN_B / DDN_H.$$

Совокупные доли доходов населения с доходами ниже среднего уровня определяются величиной D_c по (30). Если известны доходы D_c , то тогда совокупные доходы населения с доходами выше среднего уровня определяются величиной $1 - D_c$. Выше было доказано, что координаты F_c и D_c соответствуют точке максимального удаления кривой Лоренца от линии равномерного дохода. Координаты $[F_c, D_c]$ вычисляются для $x = X_c$ по соответствующим параметрам исходного распределения. И тогда формула для *поляризатора доходов* принимает вид:

$$KDL = \frac{1 - D_c}{D_c} = \frac{F_c}{1 - F_c}. \quad (39)$$

Из формул (38) и (39) следует, что значения поляризатора населения KNL и поляризатора доходов KDL равны.

Индекс поляризации доходов населения IKL.

Предлагается экономически более понятная трактовка индекса поляризации денежных доходов населения - IKL . Этот показатель определяется отношением средних доходов населения в группе с доходами выше среднего уровня, к средним доходам населения в группе с доходами ниже среднего уровня. Можно показать, что

$$IKL = \left(\frac{DDN_B}{DN_B} \right) / \left(\frac{DDN_H}{DN_H} \right) = KNL \cdot KDL.$$

Вычисляем среднее значение дохода в группе населения с доходами ниже среднего уровня D_c/F_c и среднее значение дохода в группе населения с доходами выше среднего уровня $(1 - D_c)/(1 - F_c)$.

Тогда, с учетом (34) и (35), индекс поляризации доходов населения определяется как отношение среднего значения дохода в группе населения с доходами выше среднего уровня к среднему значению дохода в группе населения с доходами ниже среднего уровня:

$$IKL = \frac{(1 - D_c)}{D_c} \cdot \frac{F_c}{(1 - F_c)} = \frac{F_c^2}{(1 - F_c)^2} = \frac{(1 - D_c)^2}{D_c^2}. \quad (40)$$

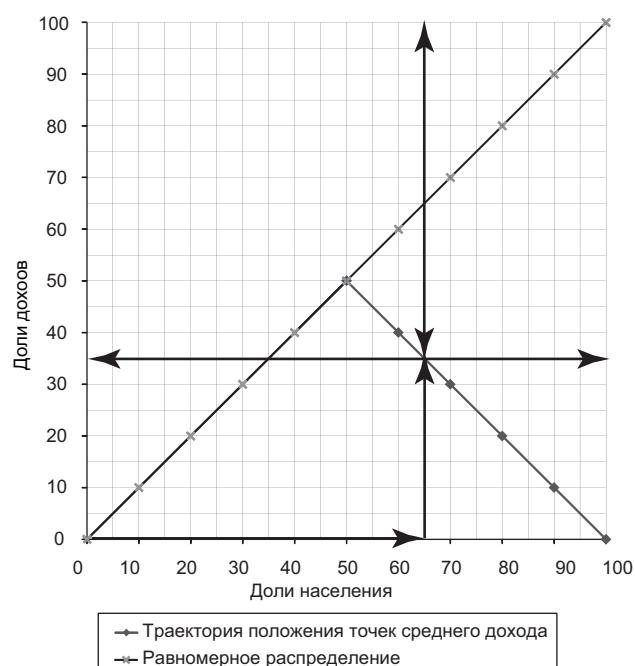


Рис. 2. Траектория геометрического места точек среднего дохода

Предлагается очень простая и наглядная процедура построения траектории положения точек среднего дохода. В координатах (F - доли населения, D - доли дохода) проводится диагональ из левого верхнего угла (0; 1) в правый нижний угол (1; 0). На оси абсцисс (доли населения) откладывается значение F_c . Из этой точки восстанавливается перпендикуляр до пересечения с обратной диагональю прямоугольника. Это и есть точка с координатами среднего дохода (F_c, D_c). Из уравнений (35) и (36) следует, что все точки среднего дохода находятся на нижней (правой) половине обратной диагонали квадрата в координатах (F, D) - доли населения, доли дохода $\{(0,5; 0,5), (1,0; 0,0)\}$.

Через точку с координатами среднего дохода (F_c, D_c) проводятся горизонталь и вертикаль до пересечения с осями координат. В левом верхнем и правом нижнем углу образуются два квадрата.

Если площадь левого верхнего квадрата $H = (1 - D_c)F_c$ трактовать как условный средний доход населения с доходами выше среднего уровня (богатых), а площадь квадрата в правом нижнем углу $L = (1 - F_c)D_c$ - как условный средний доход населения с доходами ниже среднего уровня (бедных), то отношение площадей этих квадратов и есть индекс поляризации денежных доходов населения - IKL :

$$IKL = H/L = F_c(1 - D_c)/(1 - F_c)D_c.$$

В экономическом смысле индекс поляризации доходов населения трактуется как отношение среднего дохода высокодоходных групп населения к среднему доходу низкодоходных групп населения (в точности соответствует отношению площадей квадратов H и L). В случае «абсолютного равенства» $H = L$ и индекс поляризации $IKL = 1$. В случае «абсолютного неравенства» $H \rightarrow 1$ и $L \rightarrow 0$ и индекс поляризации $IKL \rightarrow \infty$. Таким образом, теоретический диапазон изменения индекса поляризации денежных доходов населения $1 < IKL < \infty$, а фактический рабочий диапазон изменения значительно меньше и ограничен значениями $2 < IKL < 5$.

Формула (40) допускает еще несколько трактовок.

Из рис. 3 следует, что $tg\alpha = \frac{D_c}{F_c}$ - это средний доход в низкодоходной группе, а $tg\beta = \frac{1 - D_c}{1 - F_c}$ - сред-

ний доход в высокодоходной группе. Учитывая, что $\alpha + \beta = \pi/2$, можем получить еще несколько эквивалентных формул.

Тогда индекс поляризации доходов населения определяется значениями тангенсов и котангенсов этих углов: $IKL = tg\beta/tg\alpha$, или $IKL = tg\beta ctg\alpha$, или $IKL = tg^2\beta$, или $IKL = ctg^2\alpha$.

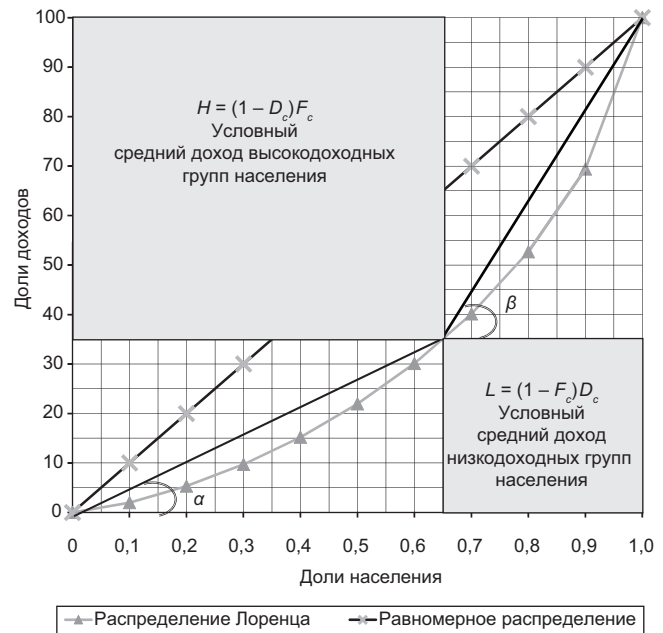


Рис. 3. Определения параметров поляризации СДД

Точность расчета индекса поляризации доходов IKL в отличие от коэффициента фондов KF_{10} или индекса Джини ID достаточно высокая и определяется только точностью расчетов показателя F_c или D_c . Точность расчетов показателя F_c или D_c определяется только точностью расчета показателя дисперсии логарифма дохода. Величина индекса поляризации доходов IKL - аналог коэффициента фондов, так как определяется соотношением средних доходов высокодоходных групп населения (с доходами выше среднего уровня) и низкодоходных (с доходами ниже среднего уровня). В отличие от коэффициента фондов здесь граница раздела групп населения не остается постоянной величиной, а зависит от среднеквадратического отклонения логарифма доходов и сама является дополнительной информативной характеристикой поляризации распределения населения по уровню доходов.

Оценка точности индекса поляризации денежных доходов населения - IKL зависит лишь от

точности определения величины среднеквадратического отклонения логарифма дохода.

График поведения индекса поляризации денежных доходов населения как функции среднеквадратического отклонения логарифма дохода - IKL приведен на рис. 4.

Индекс поляризации доходов населения IKL является более емкой и более точной характеристикой дифференциации, чем коэффициент фондов, и, наряду с индексом Джини, рекомендуется для оценки поляризации и дифференциации распределения населения по уровню денежных доходов.

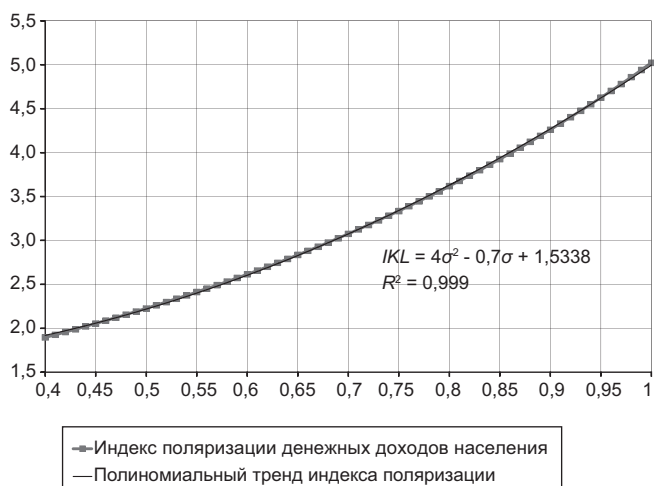


Рис. 4. Графики индекса поляризации IKL и полиномиального тренда

Полиномиальный тренд в рабочем диапазоне среднеквадратического отклонения логарифма дохода $0,4 < \sigma < 1,0$ с высокой точностью аппроксимирует оценку индекса поляризации денежных доходов населения - IKL :

$$IKL = 4\sigma^2 - 0,7\sigma + 1,5338 \quad R^2 = 0,999.$$

Полезной характеристикой поляризации денежных доходов населения является **критерий поляризации денежных доходов населения - KPL** - величина, обратная индексу поляризации денежных доходов населения:

$$KPL = (1 - F_c) \cdot D_c / F_c \cdot (1 - D_c).$$

Критерий поляризации денежных доходов населения - KPL - определяет, какую долю доходы низкодоходных групп населения составляют в доходах высокодоходных групп населения.

На рис. 5 приведены совмещенные графики критерия поляризации KPL и полиномиального тренда критерия поляризации.

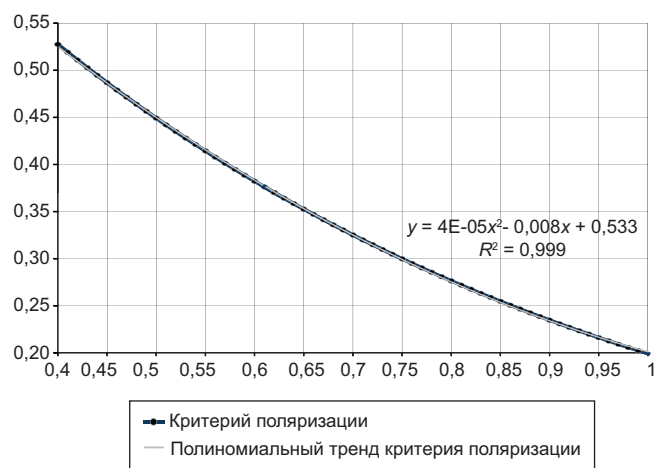


Рис. 5. Графики критерия поляризации KPL и полиномиального тренда

Полиномиальный тренд критерия поляризации в диапазоне $0,4 < \sigma < 1,0$ имеет вид:

$$KPL = 0,4\sigma^2 + 1,12\sigma + 0,9171 \quad R^2 = 0,999.$$

Особый смысл предлагаемой методологии состоит еще и в том, что оценки поляризации получаются из анализа поведения распределения населения по уровню СДД в том диапазоне денежных доходов, где они описывают поведение распределения наилучшим образом. Совсем неважно, каким законом описывается распределение населения по уровню СДД высокодоходных групп населения. Достаточно сведений о доле численности и доле объема доходов этой группы. И неважно, из какого закона следуют эти сведения. Все равно они должны быть эквивалентны показателям, получаемым из макроэкономических балансов, таких, как баланс денежных доходов и расходов населения. И единственное требование к данным любого распределения - это возможность получения оценок численности населения и объемов доходов исследуемых групп населения. Пусть даже распределение населения по уровню СДД высокодоходных групп населения подчиняется закону Парето. В нашем случае эти показатели получены из логнормального распределения. Результаты расчетов поляризации получаются одинаковыми.

Литература

1. Великанова Т., Колмаков И., Фролова Е. Совершенствование методики и моделей распределения населения по среднему душевому доходу // Вопросы статистики. 1996. № 5. С. 50-58.
2. Ефимова М.Р., Бычкова С.Г. Социальная статистика: учеб. пособие / под ред. М.Р. Ефимовой. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 560 с.

3. Колмаков И.Б. Методы и модели прогнозирования показателей дифференциации денежных доходов населения. - М.: Институт микроэкономики, 2004. - 168 с.
4. Колмаков И.Б. Методы прогнозирования показателей уровня бедности с учетом обездоленных групп населения // Проблемы прогнозирования. 2008. № 5. С. 95-109.
5. Колмаков И.Б. Методы расчета показателей поляризации денежных доходов населения // Вопросы статистики. 2007. № 9. С. 28-35.
6. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. - 640 с.
7. Методологические положения по статистике. Вып. 1. М.: Госкомстат России, 1996.
8. Павловский З. Введение в математическую статистику. - М.: Статистика, 1967. - 285 с.
9. Римащевская Н.М. Четыре принципиальных вопроса преодоления бедности в России // Народонаселение. 2006. № 2. С. 9-13.
10. Социально-экономическое положение России. Январь-март 2014 г. - М.: Росстат, 2014.
11. Суворов А.В. Доходы и потребление населения: макроэкономический анализ и прогнозирование. М.: МАКС Пресс, 2001. - 271 с.
12. Суринов А.Е. Доходы населения. Опыт количественных измерений. - М.: Финансы и статистика, 2000. - 432 с.
13. Фридмен М. Если бы деньги заговорили.../ Пер. с англ. - 2-е изд. - М.: Дело, 2002. - 160 с.
14. Шевяков А.Ю., Кирута А.Я. Измерение экономического неравенства. - М.: Лето, 2002. - 320 с.
15. Lerman R.I., Yitzhaki Sh. A note on the calculation and interpretation of the Gini index. *Economic letter*, 1984, vol. 15, pp. 363-368.
16. Lerman R.I., Yitzhaki Sh. Income inequality effects by income source: a new approach and applications to the United States. *The Review of Economics and Statistics*, 1985, vol. 67, no. 1, pp. 151-156.

METHODOLOGY FOR CALCULATION AND ANALYSIS OF INTEGRAL ESTIMATES OF POLARIZATION INDICES OF MONEY INCOME OF POPULATION

Igor Kolmakov

Author affiliation: Plekhanov Russian University of Economics (Moscow, Russia). E-mail: kolibor@rambler.ru.

At present time there are two indicators which are mainly used for estimates of differentiation of incomes of the population - coefficient of funds and Gini index. Being informative to a certain extent they however have a number of drawbacks.

The article examines methodology of calculation and analysis of differentiation of the money incomes of population (alongside with traditional indicators such as coefficient of funds and Gini index) on the basis of integral estimates of the polarization indices of money income of population. The author gives the methodology of the distribution parameters calculation according to reports of Federal State Statistics Service of Russian Federation for the log-normal distribution of population.

Apart from the known indicators the article suggests using new ones for assessing the stratification of the population by the level of money income - indicators of income polarization. The average income in the distribution is taken for the polarization border. The author considers the number and incomes of population below and above the average. The specific values of income are calculated and compared with each other in each of these groups. The author provides definition, methods and examples of calculation for polarization indices. For the first time ever it was proved that for log-normal distribution of the population the share of incomes of the population with incomes below the average level exactly equals the share of population with incomes above the average level. The proof of this statement follows the validity of the converse - for log-normal distribution the share of incomes of the population with incomes above the average level exactly equals the share of population with incomes below the average level.

The polarization index is determined by arithmetical operations with a single value of standard function which is - any share of population or money income with income below or above the average level. The author determines the trajectory of movement of this index in the coordinates «the shares of population - the shares of money income». Index of polarization differs from the Gini coefficient by clear economic interpretation, simplicity and accuracy of calculations. Moreover, the polarization index can be calculated taking into account the income of «disadvantaged» groups. It is shown that in addition to using the polarization index, one can use the reciprocal - the criterion of polarization.

Keywords: distribution of the population by money income level, log-normal distribution of the population, polarization of money income of population, polarization index, fundamental link between the logarithm of the variance of money income for lognormal distribution and the share of population with income below the average level, movement trajectory of polarization index, methods for calculation of polarization index.

JEL: C4, C46, D3, D31.

References

1. Velikanova T., Kolmakov I., Frolova E. Sovershenstvovaniye metodiki i modeley raspredeleniya naseleniya po srednedushevomu dokhodu [Improving methods and models of the distribution of population by per capita income]. *Voprosy statistiki*, 1996, no. 5, pp. 50-58. (In Russ.).
2. Yefimova M.R., Bychkova S.G. *Sotsial'naya statistika: ucheb. posobiye*. Pod red. M.R. Yefimovoy [Social Statistics. Edited by M.R. Yefimova]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2003. 560 p. (In Russ.).
3. Kolmakov I.B. *Metody i modeli prognozirovaniya pokazateley differentsiatsii denezhnykh dokhodov naseleniya* [Methods and models for forecasting indicators of differentiation of money income of population]. Moscow, Institut mikroekonomiki Publ., 2004. 168 p. (In Russ.).

4. **Kolmakov I.B.** Metody prognozirovaniya pokazateley urovnya bednosti s uchetom obezdoennykh grupp naseleniya [Methods of forecasting indicators of the poverty level, taking into account disadvantaged groups of population]. *Problemy prognozirovaniya*, 2008, no. 5, pp. 95-109. (In Russ.).
5. **Kolmakov I.B.** Metody rascheta pokazateley polarizatsii denezhnykh dokhodov naseleniya [Methods of calculation of polarization of population money income]. *Voprosy statistiki*, 2007, no. 9, pp. 28-35. (In Russ.).
6. **Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F.** *Spravochnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike* [Handbook on probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 640 p. (In Russ.).
7. Metodologicheskiye polozheniya po statistike. Vyp. 1. [Methodological guidelines on statistics. Vol. 1.]. Moscow, Goskomstat Rossii Publ., 1996. (In Russ.).
8. **Pavlovskiy Z.** *Vvedeniye v matematicheskuyu statistiku* [Introduction to mathematical statistics]. Moscow, Statistika Publ., 1967. 285 p. (In Russ.).
9. **Rimashevskaya N.M.** Chetyre printsipial'nykh voprosa preodoleniya bednosti v Rossii [Four fundamental questions of overcoming poverty in Russia]. *Narodonaseleniye*, 2006, no.2, pp. 9-13. (In Russ.).
10. Sotsial'no-ekonomicheskoye polozheniye Rossii. Yanvar'-mart 2014 g. [Social-and-economic situation in Russia. January-March 2014]. Moscow, Rosstat Publ., 2014. (In Russ.).
11. **Suvorov A.V.** *Dokhody i potrebleniye naseleniya: makroekonomicheskii analiz i prognozirovaniye* [Income and consumption: macroeconomic analysis and forecasting]. Moscow, MAKS Press Publ., 2001. 271 p. (In Russ.).
12. **Surinov A.Ye.** *Dokhody naseleniya. Opyt kolichestvennykh izmereniy* [Income of the population. Experience of quantitative measurements]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2000. 432 p. (In Russ.).
13. **Fridmen M.** *Yesli by den'gi zagovorili...* Per. s angl. 2-ye izd. [If money would speak...Transl. from English. Second edition]. Moscow, Delo Publ., 2002. 160 p. (In Russ.).
14. **Shevyakov A.Yu., Kiruta A.Ya.** *Izmereniye ekonomicheskogo neravenstva* [Measuring economic inequality]. Moscow, Leto Publ., 2002. 320 p. (In Russ.).
15. **Lerman R.I., Yitzhaki Sh.** A note on the calculation and interpretation of the Gini index. *Economic letter*, 1984, vol. 15, pp. 363-368.
16. **Lerman R.I., Yitzhaki Sh.** Income inequality effects by income source: a new approach and applications to the United States. *The Review of Economics and Statistics*, 1985, vol. 67, no. 1, pp. 151-156.

This research was conducted as part of works performed under the RFBR grant No. NK 13-07-0085814.

Acknowledgement: The author expresses his gratitude to Velikanova T.B. for discussing the problems of methodology for calculating the estimates of distribution of the population by the level of money incomes.

ЗАСЕДАНИЕ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ ЖУРНАЛА «ВОПРОСЫ СТАТИСТИКИ»

29 января 2015 г. состоялось заседание редакционной коллегии журнала «Вопросы статистики», на котором были подведены итоги деятельности редакции и редколлегии журнала за истекший год. В заседании участвовали члены редколлегии: И.К. Беляевский, И.И. Елисеева, М.Р. Ефимова, А.П. Зинченко, М.В. Карманов, А.Л. Кевеш, В.С. Мхитарян, Г.К. Оксенойт, Б.Т. Рябушкин, А.Е. Суринов и сотрудники редакции: зам. главного редактора В.П. Шулаков, ответственный секретарь редакции О.В. Ерёмкина, помощник главного редактора С.В. Бородин. На заседании также присутствовали Г.И. Абдрахманова (Институт статистических исследований и экономики знаний НИУ ВШЭ) – по поручению члена редколлегии Л.М. Гохберга и Е.С. Дунаева (заместитель начальника Управления сводных статистических работ и общественных связей Росстата).

С отчетом о проделанной работе выступил главный редактор журнала «Вопросы статистики» Б.Т. Рябушкин, который проинформировал присутствующих об итогах работы в 2014 г., проанализировал основную направленность и содержание публикаций за истекший период, обозначил проблемы, на решении которых необходимо сосредоточить внимание в текущем году, сформулировал цели и задачи редакционной политики на ближайшую перспективу. В своем выступлении Б.Т. Рябушкин отметил участие журнала «Вопросы статистики» в 2014 г. в конкурсе по государственной поддержке программ развития российских научных журналов и их продвижению в международное научно-информационное пространство и его результатах.

С сообщением о ходе реализации «Программы повышения качества научных публикаций, их соответствия международным стандартам и интеграции журнала в глобальное научно-информационное пространство», разработанной в рамках участия в конкурсе по государственной поддержке отечественных научных журналов, выступила ответственный секретарь редакции О.В. Ерёмкина. В своем выступлении она остановилась также на основных библиометрических показателях журнала и возможностях их улучшения.

В ходе обсуждения отдельные замечания и соображения по поводу необходимости усиления научной направленности журнала, повышения качества публикаций, их соответствия международным стандартам, дальнейшего совершенствования организационной деятельности редакции журнала, усиления ее взаимодействия с членами редакционной коллегии, авторами и рецензентами высказали А.Е. Суринов, И.И. Елисеева, М.Р. Ефимова, А.П. Зинченко, В.П. Шулаков.

По итогам заседания было принято решение, в котором работа коллектива редакции журнала «Вопросы статистики» за 2014 г. по повышению качества и конкурентоспособности журнала в современных условиях была в целом одобрена. В решении сформулированы предложения, которые необходимо реализовать в ближайшей перспективе (будут доведены до сведения читателей в следующем номере журнала).