Анализ потребительского спроса в России: двухэтапное построение аналитических индексов

Владимир Константинович Горбунов[а)],
Александр Геннадьевич Львов[б)]
[а)] Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия;
[б)] ООО АК «ЭйрБриджКарго», г. Москва, Россия

В статье развиваются методы построения аналитических («экономических») индексов и направления их применения в анализе потребительского спроса в России на основе официальных статистических данных о потреблении товаров и услуг (468 наименований за период 2012–2017 гг.). «Экономическое» направление индексологии, основанное на использовании теории потребительского спроса, при построении индексов цен и измерении динамики потребления учитывает потребительские предпочтения, а не субъективные оценки статистиков или авторов различных индексных формул. Данное направление имеет длительную историю, восходящую к работе 1924 г. советского экономиста А.А. Конюса. Развитие этой концепции в трудах западных исследователей относится лишь к индивидуальному спросу или спросу домашних хозяйств ввиду отсутствия в неоклассической Economics теории рыночного спроса. В работах последних лет В.К. Горбунова обоснована холистическая (целостная) теория рыночного спроса и развиты методы вычисления аналитических индексов, причем с использованием неоднозначности восстановления функции полезности по конечному набору данных для вариантного определения индексов со следующими характеристиками: оптимистические, пессимистические и объективные.

Для сравнения традиционного и «экономического» направлений индексологии также построены индексы цен и количеств Ласпейреса, Пааше и Фишера. Индексы вычислены на основе как общих статистических данных о ценах и потреблении населения, так и данных в разрезе основных групп потребительских благ: продовольственные товары, непродовольственные товары и услуги. По групповым индексам построены общие (двухэтапные) индексы всех видов и проверено свойство совместности агрегирования. Полученные результаты являются новым примером успешной верификации холистической теории рыночного спроса.

Ключевые слова: рыночный спрос, индексные построения, индекс Фишера, аналитические индексы, индекс стоимости жизни Конюса, суперлативные индексы, неравенства Африата, вариативный метод.
JEL: C43, C61, C81, E31, E71.
doi: https://doi.org/10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113.

Для цитирования: Горбунов В.К., Львов А.Г. Анализ потребительского спроса в России: двухэтапное построение аналитических индексов. Вопросы статистики. 2022;29(4):97–113.

The Analysis of Consumer Demand in Russia: Two-Stage Construction of Analytical Indexes

Vladimir K. Gorbunov[a)],
Alexander G. Lvov[b)]
[a)] Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia;
[b)] AirBridgeCargo Airlines LLC, Moscow, Russia

The article develops methods for constructing analytical («economic») indices, and their application in the analysis of consumer demand in Russia based on official statistics on the consumption of goods and services (468 items for the period 2012–2017). The «economic» direction of indexology, which is based on the use of consumer demand theory, when constructing prices indices and measuring consumption dynamics, takes into account consumer preferences instead of the subjective biases of statisticians or authors of various index formulas. This direction has a long history, dating back to the 1924 work of the Soviet economist A.A. Konüs. The development of this concept in the works of Western researchers refers only to individual or household demand due to the absence of market demand theory in neoclassical Economics. Such a holistic theory of market demand was developed in recent years in the works of V.K. Gorbunov, and on this basis were developed methods for constructing analytical indices, using the ambiguity of restoring the utility function from a finite set of data for the variant determination of indices with characteristics, namely optimistic, pessimistic, and objective.

To compare the traditional and «economic» directions of indexology, the authors constructed Laspeyres, Paasche and Fischer price and quantity indices. The indices were calculated both for the summary statistics of prices and consumption of the population, and for the main *groups of consumer goods: food products, non-food products and services. General (two-stage) indices of all types were constructed for group indices and the consistency in aggregation property was tested. The obtained results are a new example of a successful verification of the holistic market demand theory.*

Keywords: market demand, index constructions, Fisher index, analytical indices, Konüs Cost of Living Index, superlative indices, Afriat inequalities, variative method.

JEL: C43, C61, C81, E31, E71.

doi: https://doi.org/10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113.

For citation: Gorbunov V.K., Lvov A.G. The Analysis of Consumer Demand in Russia: Two-Stage Construction of Analytical Indices. *Voprosy Statistiki*. 2022;29(4):97–113. (In Russ.)

Введение

Статья посвящена дальнейшему развитию и применению методов построения аналитических индексов потребительского рыночного (совокупного) спроса, разработанных нами в [1 и 2], для анализа торговой статистики России, охватывающей широкую номенклатуру товаров и услуг.

Индексы спроса для некоторой группы товаров и услуг конечного потребления (далее – потребительские блага или просто блага) – это обобщенные скалярные (агрегированные) показатели изменения (роста или снижения) цен и количеств потребления элементарных благ рассматриваемой группы [3, п. 7.1]. В статистической практике различных стран используются, как правило, *формульные индексы*, вычисляемые по различным формулам с аргументами – статистическими данными о ценах и количествах потребления элементарных благ в периодах сравнения [4 и 5]. Существует множество индексных формул, дающих разные оценки основных показателей экономической динамики (см. [4, гл. 19]).

Аналитические индексы спроса более известны как *экономические индексы* [4–9], или *индексы Конюса* (по имени пионера «экономического» направления индексологии – советского экономиста-математика А.А. Конюса [10]). Этот подход, основанный на верифицированной теории рыночного спроса, важен как объективная альтернатива субъективному *формульному подходу*, не имеющему полноценной научной теории. Аналитические индексы отражают потребительские предпочтения населения, а не субъективные оценки статистиков и авторов различных индексных формул.

Регулярный анализ потребительского спроса, проводимый статистическими службами большинства стран, обычно сводится к вычислению некоторого *индекса потребительских цен* (ИПЦ), имеющего большое значение для любой экономической деятельности, особенно финансовой. Не отрицая важности этого показателя экономической динамики, отметим еще большую значимость *индекса количеств потребления*, характеризующего изменение уровня потребления населения страны и ее регионов, на что, в частности, обращали внимание в 1974 г. П. Самуэльсон и С. Свами [6]. Также важен углубленный ретроспективный анализ потребительского спроса, основанный на широкой номенклатуре благ, выделении в ней содержательных групп и построении групповых индексов цен и количеств различного уровня агрегирования. Этому вопросу уделяется большое внимание, в частности в международном Руководстве [4, гл. 9] (для индекса цен); в нашей статье предлагается изучать рыночный спрос на основе построения аналитических индексов цен и количеств потребления.

В упомянутой выше и другой литературе зарубежных авторов аналитические индексы определяются в рамках неоклассической теории индивидуального потребительского спроса [11, Chs. 2, 3], основанной У. Джевонсом и Л. Вальрасом (независимо) в 1870-х годах на принципе максимизации «полезности»[1] покупаемого набора благ при бюджетных ограничениях и формально развитой в 20-м веке в рамках методологического индивидуализма, согласно которому все общественные (коллективные) явления должны рассматриваться как сумма действий независимых и рациональных индивидов [11, Ch. 4].

[1] В 20-м веке неизмеримая *кардинальная полезность* заменена на *потребительские предпочтения*, представляемые *порядковой функцией полезности*, обладающей теми же математическими свойствами, что и классическая функция полезности; но новая целевая функция в литературе обычно называется по-старому – функцией полезности.

Основатели теории и их последователи понимали, что научный и практический интерес имеет рыночный спрос, но до середины 20-го века считалось, что теория рыночного спроса будет подобной теории индивидуального спроса, и Конюс определил *истинный индекс стоимости жизни* (ИСЖ) как индекс цен постоянной полезности[2] для среднего потребителя, по современной терминологии – *репрезентативного потребителя*. Вычисление ИСЖ требовало решения задачи аналитического представления потребительских предпочтений, то есть *порядковой функции полезности* (далее – функции полезности), по торговой статистике цен и количеств продаж на некотором периоде наблюдений, что в то время было проблемной математической задачей.

В 1950-х годах выяснилось, что на основе индивидуалистической теории максимизации функции полезности в рамках методологического индивидуализма, предписывающего рассматривать коллективные процессы только как сумму действий независимых и рациональных индивидов, невозможно построить аналогичную теорию агрегированного рыночного спроса, которая адекватна реальности и представляет практический интерес [11, Ch. 4; 3, п. 1.4]. Несовместность теорий индивидуального и коллективного рыночного спроса, построенных на основе одинакового принципа рациональности[3], в неоклассической Economics бездоказательно разрешена в пользу теории индивидуального спроса. Соответственно, экономические индексы в [4, гл. 17] относятся к домашним хозяйствам, а в [6–9] и других работах зарубежных авторов – к потребителям-индивидам. Для рыночного спроса экономические индексы считаются «ненаблюдаемыми» [4, п. 17.2, с. 401]. При этом во многих западных странах (Нидерландах, США, Швеции и др.) статистические службы придают большое значение экономической концепции ИСЖ (Cost-of-Living Index – COLI) Конюса как концептуальной основе определения ИПЦ [9], но ряд стран и международных организаций (Австралия, Великобритания, Международная организация труда) отвергают или игнорируют эту концепцию.

Наиболее известный специалист по экономическим (в широком смысле) индексам У. Диверт (автор теоретических глав Руководства [4]), рассматривая проблему выбора индексных формул, разработал теорию *точных* и *суперлативных* (*exact and superlative*) индексов, не отказываясь от индивидуалистической методологии Economics [7 и 8]. *Точными* названы индексы цен, которые совпадают с ИСЖ (COLI) потребителя, чьи предпочтения предполагаются однородными, представляемыми некоторой однородной функцией полезности (*агрегаторной функцией* / *aggregator function*)[4], и *суперлативными*[5] названы индексы, точные для гибкой агрегаторной функции, которая обеспечивает аппроксимацию второго порядка произвольной дважды дифференцируемой линейно-однородной функции. Установлено [7, p. 133–134; 4, пп. 17.27–17.32], что лучший из формульных индексов – *идеальный индекс Фишера* – относится к суперлативным. Суперлативными также являются индексы Уолша и Торнквиста.

Диверт, признавая важность экономической концепции Конюса, предлагает формульные суперлативные индексы цен как условную аппроксимацию ИСЖ в предположении однородности коллективных предпочтений, представляемых *однородной* функцией полезности, игнорируя, но не отрицая положение современной Economics о нелегитимности (в общем случае) предположения неоклассической рациональности рыночного спроса. При этом концепция суперлативных индексов принята в основном на настоящее время методологическом Руководстве по ИПЦ [4, п. 1.13] как *метод аппроксимации ИСЖ Конюса*.

В последние годы интерес к суперлативным (гиперболическим) индексам проявляется и в России [13], хотя эффективный метод построения самих аналитических индексов рыночного спроса, а не их аппроксимации, изложен в книге В.К. Горбунова [3] и развит в статьях [1 и 2]. В указанной книге неоклассическая теория индивидуального спроса пересмотрена в рамках общенаучной методологии как *холистическая* (целостная) *теория рыночного спроса* с содержательно обоснованной заменой нереальных объектов –

---

[2] Понятие ИСЖ было введено до указанной работы Конюса без привлечения теории спроса.

[3] Этим, в частности, скомпрометировано понятие «репрезентативный потребитель» [11, Sec. 4D].

[4] Aggregator function в теории Диверта объединяет понятия линейно-однородных вогнутых функций полезности и производственных функций. Общий класс таких функций представлен в [12].

[5] В русскоязычной терминологии «суперлативные» (превосходные) индексы неудачно названы «гиперболическими» [4, пп. 1.97, 17.4; 13].

независимых и рациональных индивидов – на *статистический ансамбль потребителей* исследуемого рынка, представляемый торговой статистикой цен и количеств [3, п. 1.1]. Предложен метод верификации теории рыночного спроса с одновременным вычислением аналитических индексов. Этот метод построен в рамках непараметрического анализа спроса, изложенного в статьях С. Африата [14] и Х. Вэриана [15 и 16], с целью выяснения вопроса, является ли статистика цен и количеств потребления (индивида) *рационализируемой* в классе *ненасыщаемых функций полезности*[6]. Охват столь широкого класса функций полезности – существенное преимущество непараметрического анализа перед классическим параметрическим методом наименьших квадратов.

В [3] метод Африата – Вэриана развит для учета приближенности статистических данных и множественности решений систем *неравенств Африата*, определяющих значения рационализирующей функции полезности на статистическом спросе. В случае однородных предпочтений этого достаточно для построения частного случая индексов Конюса – инвариантных индексов [6]. В [1 и 2] метод получил развитие с целью построения инвариантных и общих индексов Конюса с характеристиками «оптимизм», «пессимизм», «объективность». В этих и других наших работах исследовались продовольственные сегменты российского и региональных рынков. Возможность построения аналитических индексов подтвердила адекватность холистической теории рыночного спроса для данных сегментов экономики. Эта теория и методы ее верификации представлены для англоязычных читателей в [17 и 18].

В предлагаемой статье приведены успешные результаты детального исследования потребления населения России за период 2012–2017 гг. по данным статистики, охватывающей широкую номенклатуру потребительских благ. При этом индексы цен и количеств потребления построены для аналитических индексов и индексов Ласпейреса, Пааше и Фишера как за один, так и за два этапа с вычислением на первом этапе индексов для укрупненных групп: *продовольственные товары*, *непродовольственные товары*, *услуги*. Совпадение прямых и двухэтапных индексов является желаемой характеристикой процедуры агрегирования – *согласованности агрегирования* (consistency in aggregation) [4, гл. 9; 8].

В первом разделе представлены используемые в расчетах формульные и аналитические индексы и их основные свойства. Во втором разделе изложены схема метода построения аналитических индексов и новая постановка задачи об объективных индексах; в третьем – схема вычисления групповых индексов и двухэтапного вычисления общих индексов. В четвертом разделе приведены результаты построения формульных и аналитических индексов.

1. Основные формульные и аналитические индексы

Рынок n благ представляется статистическими данными о ценах $p^t \in E_+^{n^*}$ и количествах продаж $x^t \in E_+^n$ (сопряженное пространство) за отчетные периоды t:

$$\left\{ p^t, x^t : t = \overline{0,T} \right\}. \tag{1}$$

Эти данные определяют расходы $e_t = \langle p^t, x^t \rangle$. Для упрощения формул используются условные *перекрестные стоимости* $e_{ts} = \langle p^t, x^s \rangle$.

Напомним основные понятия и формулы, используемые далее при анализе рыночного спроса по данным торговой статистики (1).

1.1. Индексы Ласпейреса, Пааше и Фишера. В теории и практике особое значение придается индексам Е. Ласпейреса и М. Пааше, имеющим простую экономическую интерпретацию как отношения перекрестных e_{ts} и реализованных e_t расходов потребителей [4, пп. 1.16–1.25]:

$$P_{st}^L = \frac{e_{ts}}{e_s}, \quad Q_{st}^L = \frac{e_{st}}{e_s}; \quad P_{st}^P = \frac{e_t}{e_{st}}, \quad Q_{st}^P = \frac{e_t}{e_{ts}}. \tag{2}$$

Как видно из формул (2), в системе Ласпейреса предпочтение при определении обоих индексов (цен и количеств) для выбора одинакового набора сопряженных показателей (количеств и цен) отдается базовому периоду s, а в системе Пааше –

[6] Статистика цен и количеств потребления называется *рационализируемой* в некотором классе функций полезности, если функции спроса, порождаемые задачей максимизации данной функции полезности при расходных ограничениях, определяемых ценами и общими расходами потребителей, достаточно точно аппроксимирует данные статистики. Функция полезности $u(x)$ называется ненасыщаемой, если в любой окрестности точки $x \in E_+^n$ существует такая точка $x' \geqslant 0$, что $u(x') > u(x)$.

текущему t. Соответственно, индексы Ласпейреса можно характеризовать как *консервативные*, а индексы Пааше – *прогрессивные*. Индекс цен Ласпейреса P^L_{st} используется на практике чаще, так как он не требует информации о количествах потребления благ в текущем периоде x^t, которая необходима для индексов Пааше. Текущие рыночные показатели количеств x^t статистическим службам определять труднее, чем цены p^t.

Для индексов цен и количеств Пааше и Ласпейреса, как правило, наблюдается *эффект Гершенкрона*: $P^P_{st} \leqslant P^L_{st}$, $Q^P_{st} \leqslant Q^L_{st}$. Согласованные пары индексов цен и количеств – пары Пааше и пары Ласпейреса – не удовлетворяют важнейшему *критерию произведения* (произведение некоторой пары индексов цен P^X_{st} и количеств Q^X_{st} равно отношению соответствующих стоимостей: $P^X_{st}Q^X_{st}=e_t/e_s$) и тесту – критерию Фишера K11 – *обратимости во времени* [4, п. 16.44]). Пара индексов (P^L_{st}, P^P_{st}) используется в индексологии в качестве границ для *правильных индексов*. Ввиду возможности нарушения упорядоченности Гершенкрона[7] этой пары соответствующий критерий граничных значений K16 [4, п. 16.49] следует представлять для индекса цен P^X_{st} в виде неравенств $\min\{P^L_{st}, P^P_{st}\} \leqslant P^X_{st} \leqslant \max\{P^L_{st}, P^P_{st}\}$. Если соответствующий индекс количеств Q^X_{st} согласован с P^X_{st} по критерию произведения, то для него выполняется аналогичный критерий. Отметим, что перекрестные пары индексов Ласпейреса и Пааше (P^L_{st}, Q^P_{st}) и (P^P_{st}, Q^L_{st}) согласованы по критерию произведения: $P^L_{st}Q^P_{st} = P^P_{st}Q^L_{st} = e_t/e_s$.

Возможность построения обеих пар индексов Ласпейреса и Пааше (P^L_{st}, P^P_{st}) и (Q^L_{st}, Q^P_{st}) по информации о ценах и количествах базового и текущего периодов позволяет использовать усреднения этих индексов, и наиболее продуктивными усреднениями оказались среднегеометрические от индексов (2) – индексы Фишера:

$$P^F_{st} \triangleq \sqrt{P^L_{st}P^P_{st}} \overset{(2)}{=} \sqrt{\frac{e_{ts}e_t}{e_s e_{st}}}, \quad Q^F_{st} \triangleq \sqrt{Q^L_{st}Q^P_{st}} \overset{(2)}{=} \sqrt{\frac{e_{st}e_t}{e_s e_{ts}}}. \quad (3)$$

Индексы Фишера (3) являются лучшей парой из всех предложенных индексов спроса относительно системы двадцати тестов – критериев Фишера, а также они удовлетворяют критерию произведения [4, гл. 15, 16]. Кроме того, они усредняют субъективизм определений индексов Ласпейреса и Пааше относительно выбора базового или текущего периода в качестве ситуации сравнения и являются суперлативными, то есть хорошо аппроксимируют аналитические индексы, если потребительские предпочтения однородны. Отметим также, что через индексы цен Фишера определяется индекс Элтете – Кёвеша – Шульца, используемый в международных сопоставлениях показателя ВВП и паритетов покупательной способности валют [19, п. 13.6.2, с. 240–241].

Таким образом, индексы Фишера в содержательном отношении также являются наиболее естественными, и если системы Ласпейреса и Пааше можно определить как консервативные и прогрессивные соответственно, то усредняющие индексы Фишера (3) могут считаться *нейтральными*. Таким образом, с высказываниями отдельных специалистов относительно трудности обоснования смысла ИПЦ Фишера и фактически дискредитации его преимуществ перед остальными формульными индексами трудно согласиться. Однако не существует общепринятой системы сравнения индексов, и некоторые авторы в качестве аппроксимации ИСЖ Конюса предпочитают индексу Фишера также суперлативный индекс Торнквиста [13].

1.2. Аналитические индексы. Экономические индексы спроса введены в [6] в рамках теории индивидуального потребительского спроса [11], и в [3] они определены аналогично, но как аналитические индексы рыночного спроса, теория которого основана на модели максимизации коллективной функции полезности $u(x)$, представляющей потребительские предпочтения населения, при расходном условии $\langle p, x\rangle = e$, $x \in E^n_+$, где p – цены и $e = \langle p, x\rangle$ – совокупные потребительские расходы. В теории и методах построения экономических индексов используется множитель Лагранжа $\lambda(p,e)$ задачи максимизации $u(x)$ при условии $\langle p, x\rangle = e$.

Введем *функцию потребительских расходов*

$$e(p,w) = \min\{\langle p, x\rangle : u(x) \geqslant w, x \geqslant 0\}, \qquad (4)$$

где $w = u(x')$, x' – референтный набор.

Аналитическими индексами цен и количеств потребления, представляющими обобщенную динамику этих показателей между базовым пери-

[7] Нарушения неравенств Гершенкрона наблюдаются для парадоксального спроса Гиффена. См. [3, с. 182–183] для российской статистики 1990–1995 гг. и [18, p. 30] – академический пример.

одом s и текущим t, называются, соответственно, отношения

$$P(p^t, p^s; x) = \frac{e(p^t, u(x))}{e(p^s, u(x))},$$

$$Q(x^t, x^s; p) = \frac{e(p, u(x^t))}{e(p, u(x^s))}, \qquad (5)$$

где векторы количеств x и цен p представляют *ситуации сравнения*.

Для практического применения в качестве ситуаций сравнений используются статистические значения цен и количеств, базовые или текущие. В первом случае получаются индексы *Конюса – Ласпейреса* $P_{st}^{KL} \triangleq P(p^t, p^s; x^s)$, $Q_{st}^{KL} \triangleq Q(x^t, x^s; p^s)$, во втором – *Конюса – Пааше* $P_{st}^{KP} \triangleq P(p^t, p^s; x^t)$, $Q_{st}^{KP} \triangleq Q(x^t, x^s; p^t)$. Индекс цен P_{st}^{KL} является ИСЖ Конюса.

Как и в случае индексов Ласпейреса и Пааше, вопрос о том, как лучше/правильнее отражать динамику потребления, используя индексы Конюса – Ласпейреса или Конюса – Пааше, не имеет объективного решения, поэтому по аналогии с индексами Фишера (3) определяются среднегеометрические значения индексов *Конюса – Фишера* (КФ): $P_{st}^{KF} \triangleq \left(P_{st}^{KL} P_{st}^{KP}\right)^{1/2}$, $Q_{st}^{KF} \triangleq \left(Q_{st}^{KL} Q_{st}^{KP}\right)^{1/2}$. С учетом равенства $e(p^s, u(x^s)) = e_s$ и обозначения $u_\tau = u(x^\tau)$

$$P_{st}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^t, u_s)e_t}{e_s e(p^s, u_t)}}, \quad Q_{st}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^s, u_t)e_t}{e_s e(p^t, u_s)}}. \qquad (6)$$

Очевидно, что они удовлетворяют критерию произведения: $P_{st}^{KF} Q_{st}^{KF} = e_t/e_s$.

Индекс цен Конюса – Фишера P_{st}^{KF} можно считать уточнением оригинального ИСЖ Конюса P_{st}^{KL}, снимающим субъективизм выбора в концептуальных определениях (5) ситуаций сравнения.

1.3. Инвариантные индексы. В случае однородных предпочтений [6; 3, п. 5.6, п. 6.1.4] функция спроса и множитель Лагранжа принимают форму $x(p,e) = \hat{x}(p)e$, где $\hat{x}(p) = x(p,1)$ – удельный спрос, $\lambda(p,e) = \lambda(p) = u(\hat{x}(p))$, и функция расходов имеет представление $e(p, u(x)) = u(x)/\lambda(p)$, $p > 0$, $x > 0$. При этом для чисел Африата $\{u_t, \lambda_t\}$ выполняется тождество

$$u_t = \lambda_t e_t, \qquad (7)$$

и формулы (5) упрощаются:

$$P_{st} \triangleq P\left(p^t, p^s; x\right) = \frac{\lambda_s}{\lambda_t},$$

$$Q_{st} \triangleq Q\left(x^t, x^s; p\right) = \frac{u_t}{u_s} = \frac{\lambda_t e_t}{\lambda_s e_s}. \qquad (8)$$

В силу независимости индексов (8) от ситуаций сравнения они называются *инвариантными*. Известно, что эти индексы удовлетворяют всем упомянутым критериям Фишера, а также критериям произведения и транзитивности[8]. Они ограничены индексами Пааше и Ласпейреса упорядоченно: $Q_{0t}^P \leqslant Q_{0t} \leqslant Q_{0t}^L$, $P_{0t}^P \leqslant P_{0t} \leqslant P_{0t}^L$. Из этих неравенств следует, что эффект Гершенкрона для однородных предпочтений выполняется всегда. Инвариантный индекс цен P_{st} является индексом цен Конюса – Ласпейреса P_{st}^{KL}.

Гипотеза однородности предпочтений – сильное упрощение реальности, но она часто не отвергается при обработке агрегированных приближенных данных. В общем случае простота индексов (8) стимулирует их построение как первого приближения индексов КФ (6).

2. Вариативный метод построения аналитических индексов

Для построения аналитических индексов, определяемых функцией расходов (4), необходимо конструировать коллективную функцию полезности, представляющую систему предпочтений статистического ансамбля потребителей и порождающую рыночный спрос, аппроксимирующий статистику (1). Эта задача относится к задачам аппроксимации функций определенного класса по конечному набору их приближенных значений, и такие задачи обычно являются некорректно поставленными. Под регуляризацией некорректной задачи понимается переход к близкой корректной задаче, то есть задаче с единственным решением, непрерывно зависящим от уровня погрешностей данных, и при стремлении этого уровня к нулю решение регуляризованной задачи сходится к решению исходной задачи с точными данными.

Для регуляризации некорректных задач требуется некоторая дополнительная информация

[8] Критерию транзитивности формульные индексы, явно зависящие от цен и количеств, не удовлетворяют.

[9] Вычислительная задача называется *корректно поставленной*, если она имеет единственное решение, непрерывно зависящее от исходных данных [20].

относительно искомого решения и, если есть, информация о погрешностях исходных данных[10]. Для основного варианта построения функции полезности [1 и 2], называемого *объективным*, в качестве такой информации используются индексы Фишера (3) как ориентир для аналитических индексов, определяемых искомой функцией.

2.1. Неравенства и функция Африата. Непараметрический анализ индивидуального спроса Африата – Вэриана [14–16], отвечающий на вопрос: «Является ли статистика цен и количеств потребления рационализируемой в классе ненасыщаемых функций полезности?» – разработан для индивидуального спроса, но его, очевидно, можно относить к рыночной статистике (1) и коллективной функции полезности $u(x)$. Здесь рационализируемость означает выполнение равенств

$$u_t \equiv u(x^t) = \max\left\{u(x) : \left\langle p^t, x\right\rangle \le e_t, x \ge 0\right\},\ t = \overline{0,T}. \quad (9)$$

Применение непараметрического анализа для выяснения рационализируемости статистики (1) является *методом верификации теории рыночного спроса*, выводимой из задачи максимизации коллективной функции полезности $u(x)$ (9).

По теореме Африата – Вэриана [15, p. 946] одним из четырех критериев существования такой функции полезности является *положительная разрешимость* системы *общих неравенств Африата*:

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0, \quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t, \qquad (10)$$

где $a_{ts} = \left\langle p^t, x^s - x^t\right\rangle = e_{ts} - e_t$, и если $\{u_\tau > 0, \lambda_\tau > 0\}$ – решение системы (10), то кусочно-линейная вогнутая *функция Африата*

$$\overline{u}(x) = \min_\tau\left\{u_\tau + \lambda_\tau\left\langle p^\tau, x - x^\tau\right\rangle\right\} \qquad (11)$$

рационализирует данные (1).

Для приложений и решения проблемы верификации теории спроса этот анализ развит в [1–3] для учета неизбежных неточностей статистики (1). Приведенный критерий является наиболее операбельным, легко обобщаемым для учета неточностей статистики, и функция Африата (11) позволяет вычислять значения функции расходов (4), определяющей индексы КФ (6), решая задачу линейного программирования (ЛП) – минимизировать функцию $\langle p, x\rangle$ по x при условиях:

$$\left\langle p^0, x\right\rangle \ge w,\ \lambda_\tau\left\langle p^\tau, x\right\rangle \ge w - u_\tau + \lambda_\tau e_\tau,\ \tau = \overline{1,T},\ x \ge 0\,. \quad (12)$$

Таким образом, задача (4) уточняется как

$$e(p, w) = \min\left\{\langle p, x\rangle : (12)\right\}, \qquad (13)$$

и построение индексов КФ (6) сводится к определению значений $e(p^t, u_s)$ и $e(p^s, u_t)$.

В случае однородных предпочтений равенства (7) приводят систему общих неравенств Африата (10) к эквивалентным λ-системе и u-системе:

$$\lambda_s e_s \le \lambda_t e_{ts};\quad u_s e_t \le u_t e_{ts};\quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t. \quad (14)$$

Функция Африата (11) принимает вид:

$$\hat{u}(x) = \min_\tau\left\{\lambda_\tau\left\langle p^\tau, x\right\rangle\right\}.$$

Эта вогнутая функция линейно однородная. Для вычисления инвариантных индексов (8) она не используется, так как эти индексы определяются λ-числами непосредственно.

2.2. Регуляризация неравенств Африата. Совместные системы линейных неравенств имеют, как правило, многогранные множества решений, но малые изменения их коэффициентов могут приводить к утрате совместности системы и неустойчивости решений. Это значит, что задачи решения неравенств (10) и (14) с приближенными данными являются некорректно поставленными. Постановка корректных задач положительного решения этих систем основана на следующих приемах: введение на числа Африата условий

$$\lambda_0 = 1,\ u_0 = e_0; \qquad (15)$$

введение в правые части неравенств аддитивного малого параметра релаксации r, гарантирующего совместность неравенств и устойчивость множеств их решений; нормировка коэффициентов неравенств; введение критериев отбора чисел $\{u_t, \lambda_t\}$ в соответствии с желаемыми характеристиками индексов (6).

После подстановки условий (15) в неравенства (10), введения параметра релаксации r с нор-

[10] В экономической статистике информация о погрешностях, как правило, отсутствует. В [21] проблема неточности обсуждается как искажение «чистого индекса цен» (очищенного от влияния изменения в качестве продуктов) в результате эффекта замещения на периоде формирования данных.

мировочными коэффициентами получаем *общую редуцированную релаксированную нормированную систему Африата*, определяющую переменные $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1,T}\}$:

$$\begin{cases} -u_t - \lambda_t a_{t0} \le -e_0 + re_t, \quad u_s \le e_{0s} + re_s, \\ u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le r\sqrt{e_s e_t}, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \ne t. \end{cases} \qquad (16)$$

В предположении однородности предпочтений выполняются равенства (7), при которых система (16) упрощается до *однородной редуцированной нормированной релаксированной λ-системы Африата*:

$$-\lambda_t e_{t0} \le -e_0 + e_t r, \quad \lambda_s e_s \le e_{0s} + re_s,$$

$$\lambda_s e_s - \lambda_t e_{ts} \le r\sqrt{e_s e_t}, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \ne t. \qquad (17)$$

При достаточно больших значениях *r* системы (16) и (17) совместны в области положительных чисел Африата и множества их решений выпуклые (многогранные), причем множество совместной системы (17) ограниченное. Параметр релаксации *r* выбирается так, чтобы он был малым, но обеспечивал совместность и устойчивость соответствующего множества решений[11]. Из этого множества можно выбирать различные решения с учетом их свойств, важных для анализа социально-экономической динамики. Методы [1 и 2] обеспечивают выбор чисел Африата, которые определяют *оптимистические*, *пессимистические* и *объективные* наборы аналитических индексов – инвариантных (8) и Конюса – Фишера (6). Для этого ставятся и решаются задачи выбора решений систем (16) и (17) с названными содержательными свойствами соответствующих индексов.

2.3. Задачи для однородной системы. Согласно схеме [1 и 2], построение аналитических индексов следует начинать, выдвигая упрощающую гипотезу однородности потребительских предпочтений, или же существования линейно однородной функции полезности, рационализирующей статистику (1). Проверка этой гипотезы заключается в определении наименьшей величины параметра релаксации *r* более простой λ-системы (17). Для этого следует решить задачу *минимальной релаксации*, обеспечивающей ее совместность в пространстве переменных $\{\lambda_1,\dots,\lambda_T, r\}$:

$$r_\lambda = \arg\min\{r\colon (17),\ \lambda \geqslant 0\}. \qquad (18)$$

Если $r_\lambda < 0$, то система (17) регулярна при $r = 0$. При $r = r_\lambda \geqslant 0$ система (17) не будет устойчивой. Для обеспечения ее устойчивости выбирается малый параметр сверхрелаксации $\rho > 0$, умеренно возмущающий конечный результат анализа спроса, и в (16) закрепляется значение $r = r_\lambda^\rho = \max\{r_\lambda + \rho, 0\}$.

Содержательные решения $(\lambda_1,\dots,\lambda_T)$ системы (17) с $r = r_\lambda^\rho$ выбирают, ориентируясь на базовые инвариантные индексы $\{P_{0t}, Q_{0t}\}$, определяемые в (8) решением λ и условиями (15). Наборы с конечными наименьшим индексом цен P_{0T} и с наибольшим индексом количеств Q_{0T} считаются *оптимистическими*, и наборы с наибольшим P_{0T} и с наименьшим Q_{0T} – *пессимистическими*. Задачи построения таких индексов в силу формул $P_{0t} = 1/\lambda_t$, $Q_{0t} = (\lambda_t e_t)/e_0$ являются обычными задачами ЛП. При этом максимизация множителя λ_T при условиях (17) с $r = r_\lambda^\rho$ и $\lambda \geqslant 0$ дает решение $(\lambda_1^{Mh},\dots,\lambda_T^{Mh})$, определяющее *оптимистические* инвариантные индексы цен $P_{0t}^{(opt)} = 1/\lambda_t^{Mh}$ и количеств $Q_{0t}^{(opt)} = (\lambda_t^{Mh} e_t)/e_0$, и минимизация λ_T при тех же условиях дает решение $(\lambda_1^{mh},\dots,\lambda_T^{mh})$, определяющее *пессимистические* инвариантные индексы цен $P_{0t}^{(pes)} = 1/\lambda_t^{mh}$ и количеств $Q_{0t}^{(pes)} = (\lambda_t^{mh} e_t)/e_0$.

Объективное решение λ-системы (17) определяется так, что соответствующие инвариантные индексы (8) наиболее близки к почти идеальным индексам Фишера (3). Сопоставление обратных индексов $P_{t0} = \lambda_t$ и P_{t0}^F приводит к задаче квадратичного программирования

$$F_\lambda^{\min} = \min\left\{\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda_t - P_{t0}^F\right)^2 : (17)\right\}. \qquad (19)$$

Задача (19) имеет единственное решение $(\lambda_1^{Fh},\dots,\lambda_T^{Fh})$ – *проекцию точки Фишера* $(P_{10}^F,\dots,P_{T0}^F)$ на множество решений системы (17), и это решение непрерывно зависит от исходных данных, то есть эта задача относится к корректно поставленным экстремальным задачам. Оно определяет *объективные инвариантные индексы* цен $P_{0t}^{(Fh)} = 1/\lambda_t^{Fh}$ и количеств $Q_{0t}^{(Fh)} = (\lambda_t^{Fh} e_t)/e_0$.

2.4. Задачи для общей системы. Как и в случае однородных предпочтений, для системы (16) решается задача *минимальной релаксации*, обеспечивающей ее совместность в пространстве переменных $\{\lambda_1,\dots,\lambda_T, u_1,\dots,u_T, r\}$:

$$r_{\lambda u} = \arg\min\{r\colon (16),\ \lambda \geqslant 0,\ u \geqslant 0\}. \qquad (20)$$

[11] Подробнее см. в [1 и 2].

Если $r_{\lambda u} < 0$, то система (16) регулярна при $r = 0$. При $r = r_{\lambda u} \geqslant 0$ система (16) не будет устойчивой. Для обеспечения ее устойчивости выбирается малый параметр сверхрелаксации $\rho > 0$, умеренно возмущающий конечный результат анализа спроса, и в (16) закрепляется значение $r = r^{\rho}_{\lambda u} = \max\{r_{\lambda u} + \rho, 0\}$.

Содержательные решения задач для общей релаксированной системы (16) аналогичны однородным задачам λ-системы (17) с заменой инвариантных индексов (8) на аналитические индексы (6), где $s = 0$, то есть

$$P_{0t}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^t, e_0)e_t}{e_0 e(p^0, u_t)}},\; Q_{0t}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^0, u_t)e_t}{e_0 e(p^t, e_0)}},\; t = \overline{1, T}. \quad (21)$$

В [2] указан способ переформулирования задач оптимизации значений (21) как задач ЛП. Функция потребительских расходов $e(p, w)$ строго возрастает относительно уровня потребления w, так как его повышение возможно при росте расходов, и из формул (21) следует, что индекс P_{0T}^{KF} убывает с ростом числа u_T, а индекс Q_{0T}^{KF} возрастает. Соответственно, задача *оптимистического выбора* решения общей системы Африата (16) с параметром $r = r^{\rho}_{\lambda u}$ заключается в выборе решения $(\lambda_1^{Mg}, ..., \lambda_T^{Mg}, u_1^{Mg}, ..., u_T^{Mg})$ с максимальным значением u_T при условиях (16) с $r = r^{\rho}_{\lambda u}$ и неотрицательности переменных $\{\lambda_t, u_t\}$, а задача *пессимистического выбора* решения общей системы (16), обеспечивающая максимальное значение P_{0T}^{KF} и минимальное значение Q_{0T}^{KF}, заключается в выборе решения этой системы $(\lambda_1^{mg}, ..., \lambda_T^{mg}, u_1^{mg}, ..., u_T^{mg})$ с минимальным значением u_T при тех же условиях.

Задача *объективного выбора*[12], аналогичная *однородной* задаче (19), заключается в минимизации функционала квадратичного отклонения индексов КФ (21) от индексов Фишера (3), то есть

$$\sum_{i=1}^{T}\left[\left(\sqrt{\frac{e\left(p^t, e_0\right)e_t}{e\left(p^0, u_t\right)e_0}} - P_{0t}^{F}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{e\left(p^0, u_t\right)e_t}{e\left(p^t, e_0\right)e_0}} - Q_{0t}^{F}\right)^2\right] \to \min, \quad (22)$$

при условиях (16) с $r = r^{\rho}_{\lambda u}$ и неотрицательности $\{\lambda_t, u_t\}$. Значения функции расходов $e(p^t, e_0)$, $e(p^0, u_t)$, определяются задачами ЛП (13). Решение этой задачи обозначим $(\lambda_1^F, ..., \lambda_T^F, u_1^F, ..., u_T^F)$.

Опыт реализации задач оптимистического и пессимистического выбора решений общей системы Африата (16) показал, что без наложения дополнительных условий эти решения обычно имеют большие вариации соседних компонент с разными знаками, и даже нулевые значения. Это приводит к *эффекту пилы*, когда соседние числа Африата резко меняются, чередуя направления больше/меньше. Для устранения этого эффекта в качестве приемов регуляризации в [2] предложено два варианта стабилизации решений с ориентировкой на λ-решения $\{\lambda_t^{Mh}\}$, и $\{\lambda_t^{mh}\}$ соответствующих однородных задач вместе с сопряженными числами $u_t^{Mh} = \lambda_t^{Mh} e_t$ и $u_t^{mh} = \lambda_t^{mh} e_t$, то есть для стабилизации используются референтные векторные пары (λ^{Mh}, u^{Mh}) и (λ^{mh}, u^{mh}) соответственно. В первом варианте задается α-коридор допустимых отклонений решения общей системы (16) от соответствующих референтных решений. Параметр $\alpha \in [0,1)$ определяет относительную величину допустимых отклонений искомых чисел Африата от референтных чисел неравенствами, из которых укажем неравенства для оптимистического варианта:

$$(1-\alpha)\lambda_t^{Mh} \le \lambda_t \le (1+\alpha)\lambda_t^{Mh},$$
$$(1-\alpha)u_t^{Mh} \le u_t \le (1+\alpha)u_t^{Mh},\; t = \overline{1, T}.$$

Опыт решения объективной задачи (22) показывает умеренные вариации решений без стабилизирующих приемов.

3. Построение групповых и общих индексов

Пусть номенклатура n благ исследуемого рынка разбита на l групп так, что компоненты статистики всего рынка (1) представляются векторами цен $p^t = (p^{1t}, ..., p^{lt})$ и количеств $x^t = (x^{1t}, ..., x^{lt})$, где групповые данные представляются векторами $p^{kt} \in E_+^{n_k *}$ и $x^{kt} \in E_+^{n_k}$, $k = \overline{1, l}$. Таким образом, для каждой группы имеется статистика:

$$\left\{p^{kt}, x^{kt}; e_t^{k} = \left\langle p^{kt}, x^{kt}\right\rangle : t = \overline{0, T}\right\}. \quad (23)$$

Введем общие обозначения для индексов различных видов. *Прямые индексы* цен и количеств, рассчитываемые по полной исходной статистике (1), обозначим соответственно P_{0t}^{X} и Q_{0t}^{X}, где X обозначает один из видов индексов (L, P, F, KF). *Групповые индексы* цен и количеств, рассчитываемые по соответствующим статистикам (23), обозначим P_{0t}^{Xk} и Q_{0t}^{Xk}. Для *прямых инвариантных*

[12] Данная задача поставлена и решена впервые.

индексов сохраним обозначения (8), и *групповые инвариантные индексы* будем обозначать далее P_{0t}^{k} и Q_{0t}^{k}.

Построение групповых индексов является как самостоятельной целью детального анализа спроса, так и первым этапом двух/многоэтапной процедуры построения общих индексов [4, гл. 9, рис. 9.1]. Ограничимся далее описанием двухэтапной ($l=2$) процедуры построения индексов спроса. При этом несущественно, какой вид индексов строится.

На *первом этапе* для каждой из номенклатурных групп (23) строятся некоторые индексы цен P_{0t}^{Xk} и количеств Q_{0t}^{Xk} , где X обозначает вид индекса.

На *втором этапе* индексы P_{0t}^{Xk} принимаются за групповые уровни цен $z_k^t = P_{0t}^{Xk}$, и в качестве групповых уровней количеств принимаются числа $q_k^t = e_0^k Q_{0t}^{Xk}$. Введем векторы агрегированных групповых цен $z^t = (z_1^t,...,z_l^t)$ и количеств $q^t = (q_1^t,...,q_l^t)$. Таким образом, построена агрегированная статистика группового потребления второго уровня:

$$\left\{z^t,\, q^t;\, \hat{e}_t = \left\langle z^t,\, q^t\right\rangle : t = \overline{0,T}\right\}. \qquad (24)$$

Получаемые по статистике (24) двухэтапные *общие индексы* обозначим, соответственно, $\hat{P}_{0t}^{X}$ и $\hat{Q}_{0t}^{X}$ и двухэтапные *общие инвариантные* – $\hat{P}_{0t}$ и $\hat{Q}_{0t}$.

В соответствии с теорией экономических индексов для инвариантных индексов условие согласованности агрегирования должно выполняться[13]; следовательно, одноэтапные инвариантные индексы должны совпадать с двухэтапными с точностью до вычислительных погрешностей: $\hat{P}_{0t} \approx P_{0t}$ и $\hat{Q}_{0t} \approx Q_{0t}$.

В России известны работы [22 и 23] авторов, строящих инвариантные индексы, считая однородность предпочтений неотъемлемым свойством рациональности и решая методом Варшалла – Вэриана [16] мультипликативно релаксированную λ-систему неравенств Африата $\lambda_s e_s \leqslant \omega \lambda_t e_{ts}$ с минимальным значением параметра $\omega \geqslant 0$, обеспечивающим совместность, но не гарантирующим устойчивость множества решений системы неравенств. Для случая, когда свойство однородности отвергается (при существенно положительном минимальном параметре ω), в [23] демонстрируется метод поэтапного построения инвариантных индексов с подбором, если это возможно, формального разбиения без обеспечения содержательной общности благ исходной номенклатуры на группы, для которых свойство однородности предпочтений не отвергается.

4. Анализ потребительского спроса в России

На практике большинство статистических служб ограничивается построением простых индексов цен с референтной корзиной агрегатов однородных элементарных благ [4, гл. 20][14]. При этом вначале оцениваются элементарные индексы для референтных агрегатов, и затем элементарные индексы цен усредняются с весами, равными оценкам относительных расходов потребителей на эти агрегаты. Полученный агрегат представляет официальный ИПЦ, рассчитываемый в России. По элементарным индексам вычисляются еженедельные, месячные и официальный годовой ИПЦ. Наше исследование основано на более полной статистической информации о потреблении населения России и вычислении индексов цен и количеств потребления как по формульным индексам Ласпейреса, Пааше и Фишера, так и по аналитическим индексам, рассчитанным по алгоритмам, описанным выше.

Подробные статистические данные о потреблении населения России представлены на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики[15] в номенклатуре 528 наименований для периода 2012–2017 гг. При этом о многих благах низшего уровня агрегирования нет полной информации относительно цен или структуры потребления (стоимости платных услуг и оборота розничной торговли продовольственными и непродовольственными товарами), по которым рассчитывались количества потребления. Такие блага исключены из наших расчетов. Всего номенклатура благ, обеспеченная информацией на всем периоде, составила 468 наименований, в том числе по трем группам: *продовольственные товары* – 119, *непродовольственные товары* – 244, *услуги* – 105.

[13] См. [8] и обзорную статью по непараметрическому анализу [22, с. 15].

[14] Росстат до 2020 г. рассчитывал еженедельный ИПЦ по корзине из 64 товаров и услуг. См. «Официальная статистическая методология по определению еженедельной оценки индекса потребительских цен». URL: https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/met-index.doc.

[15] URL: https://rosstat.gov.ru.

Исходные данные и результаты выборки набора благ с полной информацией о ценах и количествах потребления на всем промежутке (6 лет) собраны в документе «ИсхДанные.xlsx». Он доступен в облачном хранилище по ссылке: https://cloud.mail.ru/public/y4zj/16TzYYKQd. Документ состоит из трех листов: «Номенклатура», «Группировка» и «Выборка». Последний лист содержит статистические данные (23) о ценах и количествах погодового потребления по трем названным группам. Объединение этих данных представляет торговую статистику (1).

Для полной номенклатуры товаров и услуг (1) и каждой k-группы рассчитывались как формульные индексы [Пааше, Ласпейреса (2) и Фишера (3)] цен и количеств потребления, так и аналитические индексы – инвариантные (8) и Конюса – Фишера (6). Аналитические индексы вычислялись в трех вариантах: оптимистические, пессимистические и объективные. Соответственно, для инвариантных индексов решались задачи параграфа 2.3 и для КФ – задачи параграфа 2.4.

Полученные аналитические индексы цен сопоставлены с индексами цен, рассчитываемыми Росстатом для общего спроса и указанных групп благ.

4.1. Результаты для формульных индексов. В таблице 1 представлены групповые индексы цен P_{0t}^{Xk} и количеств Q_{0t}^{Xk} Пааше ($X=P$), Ласпейреса ($X=L$) и Фишера ($X=F$). Значения временного показателя $t=0, 1,...,5$ соответствуют годам от 2012 до 2017. Отметим выполнение эффекта Гершенкрона для всех соответствующих пар индексов Ласпейреса и Пааше: $P_{0t}^{Pk}<P_{0t}^{Lk}$, $Q_{0t}^{Pk}<Q_{0t}^{Lk}$. При этом «консервативные» индексы Ласпейреса превышают соответствующие «прогрессивные» индексы Пааше на величину не менее 0,002. Наибольшее превышение по индексам цен $P_{05}^{L3}-P_{05}^{P3}=0{,}065$ и по индексам количеств $Q_{05}^{L3}-Q_{05}^{P3}=0{,}047$. Далее ограничимся детальным анализом динамики в основном индексов Фишера.

Как и следовало ожидать для российской экономики последнего тридцатилетия, все представленные индексы потребительских цен на рассмотренном периоде монотонно растут. При этом темпы роста наиболее высокие в группе продовольственных товаров ($k=1$) и самые низкие в группе услуг ($k=3$).

Таблица 1

Групповые формульные индексы

Индексы	t	Групповые индексы цен			Групповые индексы количеств		
		P_{0t}^{X1}	P_{0t}^{X2}	P_{0t}^{X3}	Q_{0t}^{X1}	Q_{0t}^{X2}	Q_{0t}^{X3}
Пааше ($X=P$)	0	1	1	1	1	1	1
	1	1,068	1,053	1,082	1,022	1,074	1,026
	2	1,229	1,147	1,173	0,958	1,083	1,050
	3	1,393	1,313	1,290	0,904	0,972	0,996
	4	1,451	1,397	1,345	0,911	0,932	0,999
	5	1,458	1,449	1,361	0,959	0,919	0,996
Ласпейреса ($X=L$)	0	1	1	1	1	1	1
	1	1,076	1,055	1,089	1,030	1,076	1,032
	2	1,245	1,156	1,205	0,970	1,091	1,079
	3	1,413	1,332	1,324	0,917	0,987	1,022
	4	1,474	1,423	1,380	0,926	0,949	1,025
	5	1,486	1,472	1,426	0,977	0,934	1,043
Фишера ($X=F$)	0	1	1	1	1	1	1
	1	1,072	1,054	1,085	1,026	1,075	1,029
	2	1,237	1,152	1,189	0,964	1,087	1,064
	3	1,403	1,322	1,307	0,910	0,979	1,009
	4	1,462	1,410	1,362	0,918	0,940	1,012
	5	1,472	1,460	1,393	0,968	0,926	1,019

Все групповые индексы количеств, отражающие динамику потребления, в первый период (2013 г.) незначительно растут; в частности, индекс Фишера в первой группе – на 2,6%, во второй – на 7,5 и в третьей – на 2, 9%. Затем идет его снижение: в первой и третьей группах с некоторым подъемом в 2016 и 2017 гг. и во второй группе монотонное снижение до 92,6% от базового уровня 2012 г.

Общую оценку ситуации на потребительских рынках характеризует пара общих индексов цен и количеств, которые построены как прямо по исходным статистическим данным (1), так и на основе двухэтапной процедуры, описанной в третьем разделе статьи. Для построения двухэтапных индексов $(\hat{P}^X_{0t}, \hat{Q}^X_{0t})$ по групповым индексам $(P^{Xk}_{0t}, Q^{Xk}_{0t})$ составлялась статистика потребления по группам второго уровня (24), где $z^t_k = P^{Xk}_{0t}$ и $q^t_k = e^k_0 Q^{Xk}_{0t}$. При этом использовались данные о стоимости потребления (млн рублей) в каждой из трех групп, вычисленные по исходной информации (файл «ИсхДанные.xlsx», лист «Выборка»):

$$e^1_0 = 9\,945\,776;\ e^2_0 = 9\,643\,414;\ e^3_0 = 5\,711\,226.$$

По этим данным и формулам (2) и (3) построены двухэтапные индексы Пааше $(\hat{P}^P_{0t}, \hat{Q}^P_{0t})$, Ласпейреса $(\hat{P}^L_{0t}, \hat{Q}^L_{0t})$ и Фишера $(\hat{P}^F_{0t}, \hat{Q}^F_{0t})$. Они совпали до трех десятичных разрядов (до 0,1%) с соответствующими прямыми индексами (P^P_{0t}, Q^P_{0t}), (P^L_{0t}, Q^L_{0t}) и (P^F_{0t}, Q^F_{0t}), построенными по исходным данным о 468 наименованиях из выбранной номенклатуры (см. таблицу 2).

Таблица 2

Общие (прямые) формульные индексы

t	Индексы цен			Индексы количеств		
	P^P_{0t}	P^L_{0t}	P^F_{0t}	Q^P_{0t}	Q^L_{0t}	Q^F_{0t}
0	1	1	1	1	1	1
1	1,065	1,071	1,068	1,042	1,048	1,045
2	1,183	1,202	1,193	1,024	1,041	1,033
3	1,337	1,362	1,349	0,949	0,967	0,958
4	1,405	1,433	1,419	0,938	0,957	0,947
5	1,431	1,467	1,449	0,951	0,975	0,963

При сравнении прямых и двухэтапных индексов, представленных с большей разрядностью, различие у всех пар, кроме пары $(P^P_{05}, \hat{P}^P_{05})$, проявляется в пятом разряде после десятичной запятой и достигает максимума 0,00049 для этой пары.

Для прямых общих индексов, как и для всех групповых индексов, эффект Гершенкрона выполняется строго. При этом значения индексов Ласпейреса превышают соответствующие значения индексов Пааше на величину не менее 0,006. Наибольшее превышение по индексам цен $P^L_{05} - P^P_{05} = 0{,}036$ и по индексам количеств $Q^L_{05} - Q^P_{05} = 0{,}024$.

Общая динамика цен представляется монотонным ростом всех трех индексов, причем индекс цен Фишера показывает в конце периода рост на 44,9% относительно 2012 г.

В первый год исследуемого периода индекс количества потребления Фишера вырос на 4,5%, после чего идет его снижение до 96,3% от уровня 2012 г.

Считается, что при оценке экономической ситуации через индексы цен Пааше и Ласпейреса использовать первый из них лучше для правительств, а второй – для оппозиции[16]. Но для оценки социально-экономической ситуации индекс количеств потребления важнее, и здесь ситуация обратная – индекс количеств Ласпейреса динамику потребления «улучшает», а индекс Пааше – «ухудшает». Таким образом, перекрестную пару индексов (P^P_{st}, Q^L_{st}) можно назвать «оптимистической», а пару (P^L_{st}, Q^P_{st}) «пессимистической». Как показано в параграфах 2.3 и 2.4, при использовании аналитических индексов такой подгонки выбора типа индексов не требуется, но остается произвол выбора решений системы неравенств Африата, однородной (17) или общей (16), допустимый в рамках метода непараметрического анализа спроса.

4.2. Результаты для аналитических индексов. Λ-системы Африата (17) с коэффициентами, определяемыми тремя групповыми статистиками (23), имеют отрицательные показатели совместности (18), то есть r_λ, соответственно, –0,0009, –0,0005 и –0,0007. Во всех случаях параметр сверхрелаксации ρ, обеспечивающий устойчивость множеств решений, равен 0,0001. При этих значениях исходная λ-система (14) регулярна и не нуждается в релаксации, то есть для всех групповых систем (17) полагается $r = r^\rho_\lambda = 0$. При этом гипотеза однородности предпочтений не отвергается, и по решениям задач п. 2.3 для

[16] В литературе по индексам спроса упоминаются дебаты в парламенте Великобритании после Второй мировой войны между консерваторами и лейбористами относительно такого выбора.

каждой группы благ построены инвариантные индексы (P^k_{0t}, Q^k_{0t}) трех видов: оптимистические, пессимистические и объективные. Так как объективные инвариантные индексы в трех разрядах, значимых для представления индексов, совпали с индексами Фишера (см. таблицу 1), то в таблице 3 представим только первые два вида.

Таблица 3

Групповые инвариантные индексы

Вариант индексов	t	Индексы цен			Индексы количеств		
		P^1_{0t}	P^2_{0t}	P^3_{0t}	Q^1_{0t}	Q^2_{0t}	Q^3_{0t}
«Оптимистический»	0	1	1	1	1	1	1
	1	1,068	1,053	1,082	1,030	1,075	1,032
	2	1,233	1,148	1,181	0,967	1,090	1,071
	3	1,399	1,315	1,295	0,912	0,985	1,018
	4	1,457	1,400	1,348	0,921	0,947	1,023
	5	1,462	1,449	1,378	0,974	0,934	1,031
«Пессимистический»	0	1	1	1	1	1	1
	1	1,076	1,055	1,089	1,022	1,074	1,026
	2	1,244	1,154	1,205	0,959	1,084	1,050
	3	1,413	1,325	1,323	0,904	0,977	0,997
	4	1,474	1,413	1,378	0,911	0,938	1,000
	5	1,485	1,464	1,423	0,959	0,924	0,998

Поведение инвариантных «оптимистических» и «пессимистических» индексов цен качественно подобно поведению групповых индексов – «прогрессивного» индекса Пааше и «консервативного» индекса Ласпейреса. Значения соответствующих индексов из этих групп различаются уже во втором десятичном разряде. Наибольшая разница (0,017) достигается в третьей группе между «оптимистическим» инвариантным индексом $P^3_{05} = 1{,}378$ и индексом Пааше $P^{P3}_{05} = 1{,}361$.

Значения индексов количеств первых двух групп отличаются от значений индексов количеств Пааше и Ласпейреса во втором разряде, а третьей – уже в первом разряде, то есть на десятки процентов. Здесь наибольшая разница достигается в третьей группе между значением «пессимистического» индекса Q^3_{05} и значением индекса Ласпейреса Q^{L3}_{05}: $0{,}998 - 1{,}043 = -0{,}045$. Для всех значений инвариантных индексов критерий граничных значений выполнен.

Для объяснения совпадения (на данной статистике!) значений «объективных» инвариантных индексов со значениями индекса Фишера введем *числа Африата – Фишера*, определяемые равенствами, подобными (8) при $s = 0$ и замене инвариантных индексов на индексы Фишера, то есть

$$\lambda_t^{Fk} = \frac{1}{P_{0t}^{Fk}}, \quad u_t^{Fk} = e_0^k Q_{0t}^{Fk}. \qquad (25)$$

Это определение означает, что инвариантные индексы, вычисляемые по числам (25) и формулам (8) с учетом условий (15), то есть $1/\lambda_t^{Fk}$ и u_t^{Fk}/e_0^k, являются индексами Фишера P^{Fk}_{0t} и Q^{Fk}_{0t}, и полученное совпадение означает, что набор чисел$\{\lambda_t^{Fk}\}$ – это решение λ-системы (17) и задачи (19), доставляющее целевой функции нулевое значение.

Как и формульные индексы, общие инвариантные индексы построены в прямом и двухэтапном вариантах. В теории инвариантных индексов установлено выполнение условия совместности агрегирования для этих «идеальных» индексов [8 и 22], но при вычислениях накапливаются погрешности, и результаты вычислений по разным алгоритмам теоретически совпадающих величин неизбежно расходятся. В наших построениях расхождения в соответствующих значениях двух названных вариантов наблюдались в третьем разряде для «оптимистических» и «пессимистических» индексов, достигая наибольшего значения 0,003 (0,3%) для «оптимистических» индексов цен P_{04} и P_{05}. Значения общих «оптимистических» индексов, как и групповых, практически совпали со значениями общих индексов Фишера (P^F_{0t}, Q^F_{0t}), приведенными в таблице 2.

Отдавая предпочтение прямому варианту как менее затратному по числу операций и, соответственно, меньшему накоплению вычислительных погрешностей, мы приводим в таблице 4 решения «оптимистических» и «пессимистических» задач параграфа 2.3 с коэффициентами, определяемыми полной статистикой (1). Соответствующая λ-система (17) имеет показатель совместности (18) $r_\lambda = -0{,}0008$, и для нее параметр сверхрелаксации ρ, обеспечивающий устойчивость множества решений, равен 0,0001; следовательно, в (17) полагается $r = r_\lambda^\rho = 0$.

Таблица 4

Общие инвариантные индексы и индексы Конюса – Фишера

t	«Оптимистические» индексы						«Пессимистические» индексы					
	Инвариантные		Конюса – Фишера				Инвариантные		Конюса – Фишера			
	$P_{0t}^{(opt)}$	$Q_{0t}^{(opt)}$	P_{0t}^{KF}	Q_{0t}^{KF}	λ_t^{Mg}	u_t^{Mg}	$P_{0t}^{(pes)}$	$Q_{0t}^{(pes)}$	P_{0t}^{KF}	Q_{0t}^{KF}	λ_t^{mg}	u_t^{mg}
0	1	1	1	1	1	2,530	1	1	1	1	1	2,530
1	1,065	1,048	1,065	1,048	0,861	2,646	1,071	1,042	1,073	1,040	0,841	2,627
2	1,188	1,036	1,185	1,040	0,861	2,631	1,200	1,026	1,198	1,028	0,808	2,599
3	1,341	0,964	1,334	0,969	0,861	2,447	1,361	0,950	1,366	0,947	0,808	2,389
4	1,407	0,955	1,400	0,961	0,861	2,421	1,431	0,939	1,437	0,935	0,769	2,359
5	1,434	0,974	1,428	0,978	0,861	2,468	1,466	0,952	1,471	0,949	0,750	2,395

В таблице 4 представлены значения общих прямых «оптимистических» и «пессимистических» индексов Конюса – Фишера, а также решения задач параграфа 2.4 $\{\lambda_t^{Mg}, u_t^{Mg}\}$ и $\{\lambda_t^{mg}, u_t^{mg}\}$, определяющие функции потребительских расходов (13), которые, в свою очередь, определяют соответствующие индексы (21). «Объективные» индексы, построенные по решению задачи (22), здесь также практически совпали с индексами Фишера таблицы 2, поэтому они в таблице не показаны.

Система неравенств (16) имеет показатель совместности (20) $r_{\lambda u} = -0{,}0068$, и для нее параметр сверхрелаксации ρ, обеспечивающий устойчивость множества решений, равен 0,0005, следовательно, в (16) полагается $r = r_{\lambda u}^\rho = 0$. При решении «оптимистического» и «пессимистического» вариантов для стабилизации решений использовались модифицированные задачи максимизации или минимизации значений u_T с дополнительным условием «α-коридора» [2, с. 74], ограничивающим отклонения искомых наборов чисел Африата $\{\lambda_t, u_t\}$ от соответствующих решений однородных задач параграфа 2.3 $\{\lambda_t^{Mh}, u_t^{Mh} = \lambda_t^{Mh} e_t\}$ и $\{\lambda_t^{mh}, u_t^{mh} = \lambda_t^{mh} e_t\}$ с параметром $\alpha > 0$, подбираемым при расчетах. Для «оптимистического» варианта было выбрано $\alpha = 0{,}25$, а для «пессимистического» $\alpha = 0{,}1$. Приведенные в таблице 4 u-числа имеют порядок чисел e_t, равный 10^7, и они даны в масштабе 1: 10^7.

Сравнение индексов – идеализированных инвариантных и более реалистичных Конюса – Фишера – показывает, что переход от первых ко вторым позволяет добиться более «оптимистических» или «пессимистических» оценок (в соответствии с предпочтениями заказчиков) ретроспективной социально-экономической динамики.

Приведем также результаты сопоставления полученных «объективных» аналитических индексов с годовыми значениями ИПЦ, приводимыми Росстатом в документе «Индексы потребительских цен по Российской Федерации в 1991–2021 гг.»[17]. Поскольку «объективные» индексы Конюса – Фишера практически совпали с «объективными» инвариантными, то для сравнения используем значения транзитивных инвариантных индексов цен, вычислив соответствующие погодовые индексы $P_{(t-1)t}$ и $P^k_{(t-1)t}$ (в процентном представлении):

$$P_{(t-1)t} = \frac{P_{0t}}{P_{0(t-1)}} \cdot 100\%,\ P^k_{(t-1)t} = \frac{P^k_{0t}}{P^k_{0(t-1)}} \cdot 100\%. \quad (26)$$

Погодовые ИПЦ Росстата обозначим: $P^{RS}_{(t-1)t}$ – общие и $P^{RSk}_{(t-1)t}$ – групповые. Эти индексы и соответствующие инвариантные (26) сведены в таблицу 5.

Как видно, погодовые аналитические «объективные» индексы цен, имеющие глубокое смысловое и теоретическое обоснование и рассчитанные по статистическим данным о потреблении 468 благ, хорошо согласуются с ИПЦ Росстата, рассчитанными по эвристическому алгоритму усреднения элементарных индексов цен 64 благ. Отклонения ИПЦ от наших индексов только в трех

[17] URL: https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/ind-potreb-cen.html.

Таблица 5

Погодовые инвариантные индексы цен и ИПЦ

Год	t	$P_{(t-1)t}$	$P_{(t-1)t}^{RS}$	$P_{(t-1)t}^{1}$	$P_{(t-1)t}^{RS1}$	$P_{(t-1)t}^{2}$	$P_{(t-1)t}^{RS2}$	$P_{(t-1)t}^{3}$	$P_{(t-1)t}^{RS3}$
2012	0	–	106,57	–	107,48	–	105,16	–	107,28
2013	1	106,80	106,47	107,20	107,32	105,40	104,46	108,50	108,01
2014	2	111,70	111,35	115,39	115,43	109,30	108,05	109,68	110,45
2015	3	113,16	112,91	113,42	114,00	114,76	113,65	109,75	110,20
2016	4	105,11	105,39	104,21	104,57	106,66	106,54	104,21	104,89
2017	5	102,11	102,51	100,68	101,07	103,55	102,75	102,35	104,35

позициях превосходят 1%: $P_{12}^{RS2} - P_{12}^{2} = -1,25\%$, $P_{23}^{RS2} - P_{23}^{2} = -1,11\%$, $P_{45}^{RS3} - P_{45}^{3} = 2,00\%$. Важным фактором такой близости является выбор в качестве стабилизирующего ориентира для аналитических индексов формульных индексов Фишера.

Заключение

Впервые на базе российских статистических данных за 2012–2017 гг. представлен теоретически обоснованный ретроспективный анализ потребительского рыночного спроса на 468 потребительских благ (товаров и услуг) с использованием основных формульных и аналитических индексов цен и количеств потребления. Индексы построены для полной исходной статистики (общие индексы) и ее основных содержательных групп – продовольственных товаров, непродовольственных товаров, услуг (групповые индексы). Возможность построения по данным торговой статистики аналитических индексов, определяемых функцией потребительских расходов, которая, в свою очередь, определяется коллективной функцией полезности, означает *рационализируемость данной статистики в рамках холистической теории рыночного спроса*, предложенной в работах последних лет В.К. Горбунова, что является очередным примером верификации этой теории.

Верифицированная холистическая теория рыночного спроса обосновывает теорию суперлативных индексов Диверта, аппроксимирующих инвариантные индексы рыночного спроса, и приведенные расчеты по данным российской статистики показали практическое совпадение суперлативных индексов Фишера с «объективными» инвариантными индексами. При этом теория Диверта имеет лишь концептуальное значение, так как при подтверждении однородности коллективных предпочтений (решением задачи (18) о минимальной коррекции λ-системы Африата) решение «объективной» задачи (19) представляет по формулам (8) точные инвариантные индексы. Таким образом, в случае *конструктивно установленной*, а не предполагаемой (в работах Диверта) однородной рациональности коллективных потребительских предпочтений *вычисляется истинный ИСЖ Конюса*, являющийся инвариантным индексом цен. Если гипотеза однородной рациональности отвергается или не принимается, а гипотеза неоднородной рациональности не отвергается, то построенный индекс цен Конюса – Фишера можно считать уточнением оригинального ИСЖ Конюса (Конюса – Ласпейреса).

Метод анализа рыночного спроса, представленный на примере российских статистических данных, может использоваться для региональных и других сегментов потребительского рынка страны (продуктов питания, одежды и др.), для периодов относительной стабильности рынков, что повысило бы содержательность и объективность социально-экономического анализа. При этом невозможность построения аналитических индексов, устанавливаемая существенной несовместностью общей системы неравенств Африата, будет демонстрировать нестабильность рынков относительно предложения благ и/или потребительских предпочтений. Также не следует исключать проблемы качества торговой статистики.

Литература

1. **Горбунов В.К., Львов А.Г.** Обратная задача теории рыночного спроса и аналитические индексы спроса // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21. № 1. С. 89–110. doi: https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.89-110.
2. **Горбунов В.К., Козлова Л.А., Львов А.Г.** К проблеме построения аналитических индексов рыночного спроса: вариативный подход // Вопросы статистики. 2020. Т. 27. № 3. С. 65–80. doi: https://doi.org/10.34023/2313-6383-2020-27-3-65-80.

3. **Горбунов В.К.** Потребительский спрос: аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ, 2015. URL: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611.

4. Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. Вашингтон: МВФ, 2007.

5. ILO, IMF, OECD, EU, UN, WB. Consumer Price Index Manual: Concepts and Methods. Washington, DC: IMF, 2020.

6. **Samuelson P.A., Swamy S.** Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis // The American Economic Review. 1974. Vol. 64. No. 4. P. 566–593.

7. **Diewert W.E.** Exact and Superlative Index Numbers // Journal of Econometrics. 1976. Vol. 4. No. 2. P. 114–145. doi: https://doi.org/10.1016/0304-4076(76)90009-9.

8. **Diewert W.E.** Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation // Econometrica. 1978. Vol. 46. No. 4. P. 883–900.

9. **Triplett J.E.** Should the Cost-of-Living Index Provide the Conceptual Framework for a Consumer Price Index? // The Economic Journal. 2001. Vol. 111. No. 472 (June). P. F311–F334.

10. **Конюс А.А.** Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономический бюллетень Конъюнктурного института. 1924. № 9–10. С. 64–71.

11. **Mas-Colell A., Whinston M., Green J.** Microeconomic Theory. New York: Oxford Univ. Press, 1995.

12. **Gorbunov V.K.** Analytical Representation of Concave and Quasiconcave Homogeneous Functions // Optimization. 2017. Vol. 66. No. 4. P. 507–519. doi: https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1278000.

13. **Козлова М.А.** Формула Торнквиста для расчета индекса потребительских цен в России: теория и практика // Вопросы статистики. 2020. Т. 27. № 5. С. 87–94. doi: https://doi.org/10.34023/2313-6383-2020-27-5-87-94.

14. **Afriat S.N.** The Construction of Utility Functions from Expenditure Data // International Economic Review. 1967. Vol. 8. No. 1. P. 67–77.

15. **Varian H.** The Nonparametric Approach to Demand Analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50. No. 4. P. 945–973.

16. **Varian H.** Non-Parametric Tests of Consumer Behaviour // The Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. No. 1. P. 99–110.

17. **Gorbunov V.K.** The Holistic Theory of the Consumer Market Demand // Competitiveness and the Development of Socio-Economic Systems. Proc. of the IV Int. Sci. Conf. «Competitiveness and the Development of Socio-Economic Systems» dedicated to the memory of Alexander Tatarkin (CDSES 2020), 25–26 November, 2020, Chelyabinsk State University, Russia. London, 2021. Vol. 105-CDSES. P. 476–485. doi: https://doi.org/10.15405/epsbs.2021.04.52.

18. **Gorbunov V.** Market Demand: A Holistic Theory and Its Verification // MPRA Paper No. 109154. 2021. doi: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14974.92488.

19. **Ковалев В.В.** и др. Теория статистики с элементами эконометрики в 2 ч. Ч. 2: учеб. для вузов / отв. ред. В.В. Ковалев. М.: Юрайт, 2021.

20. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

21. **Иванов Ю.Н.** К дискуссии о точности показателей макроэкономической статистики // Вопросы статистики. 2017. Т. 24. № 9. С. 11–18.

22. **Шананин А.А.** Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. № 9. С. 3–17.

23. **Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А.** Обобщенный непараметрический метод. Применение к анализу товарных рынков // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 3. С. 32–45.

Информация об авторах

Горбунов Владимир Константинович – д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра цифровой экономики, Ульяновский государственный университет. 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42. E-mail: vkgorbunov@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5276-0501.

Львов Александр Геннадьевич – канд. экон. наук, ведущий специалист, ООО «Авиакомпания ЭйрБриджКарго». 141411, г. Москва, Международное шоссе, 28Б. E-mail: aglvov@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6726-8234.

Финансирование

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект «Развитие математических моделей анализа и регулирования национальных потребительских рынков и производства» № 19-010-00972.

References

1. **Gorbunov V.K., Lvov A.G.** Inverse Problem of the Market Demand Theory and Analytical Indexes of Demand. *Middle Volga Mathematical Society Journal*. 2019;21(1):89–110. (In Russ) Available from: https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.89-110.

2. **Gorbunov V.K., Kozlova L.A., Lvov A.G.** To the Problem of Constructing Analytical Indexes of Market Demand: A Variative Approach. *Voprosy Statistiki*. 2020;27(3):65-80. (In Russ.) Available from: https://doi.org/10.34023/2313-6383-2020-27-3-65-80.

3. **Gorbunov V.K.** *Consumers' Demand: Analytical Theory and Applications*. Ulyanovsk: UlSU Press; 2015. (In Russ) Available from: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611.

4. *Consumer Price Index Manual: Theory and Practice*. Geeva: International Labour Office; 2004. (In Russ.)

5. ILO, IMF, OECD, EU, UN, WB. *Consumer Price Index Manual: Concepts and Methods*. Washington, DC: IMF; 2020.

6. **Samuelson P.A., Swamy S.** Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis. *The American Economic Review*. 1974;64(4):566–593.

7. **Diewert W.E.** Exact and Superlative Index Numbers. *Journal of Econometrics*. 1976;4(2):115–145. Available from: https://doi.org/10.1016/0304-4076(76)90009-9.

8. **Diewert W.E.** Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation. *Econometrica*. 1978;46(4):883–900.

9. **Triplett J.E.** Should the Cost-of-Living Index Provide the Conceptual Framework for a Consumer Price Index? *The Economic Journal*. 2001;111(472):F311–F334.

10. **Konüs A.A.** The Problem of the True Index of the Cost of Living. *Ekonomicheskii Byulleten' Konyunkturnogo Instituta*. 1924;(9–10):64–71. (In Russ.) (Eng. ed.: Konüs A.A. The Problem of the True Index of the Cost of Living. *Econometrica*. 1939;7(1):10–29).

11. **Mas-Colell A., Whinston M., Green J.** *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press; 1995.

12. **Gorbunov V.K.** Analytical Representation of Concave and Quasiconcave Homogeneous Functions. *Optimization*. 2017;66(4):507–519. Available from: https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1278000.

13. **Kozlova M.A.** Törnqvist Formula for Calculating a Consumer Price Index in Russia: Theory and Practice. *Voprosy Statistiki*. 2020;27(5):87–94. (In Russ.) Available from: https://doi.org/10.34023/2313-6383-2020-27-5-87-94.

14. **Afriat S.N.** The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*. 1967;8(1):67–77.

15. **Varian H.** The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*. 1982;50(4):945–973.

16. **Varian H.** Non-Parametric Tests of Consumer Behaviour. *The Review of Economic Studies*. 1983;50(1):99–110.

17. **Gorbunov V.K.** The Holistic Theory of the Consumer Market Demand. In: Popov E. et al. (eds.) *Competitiveness and the Development of Socio-Economic Systems. Proc. of the IV Int. Sci. Conf. «Competitiveness and the Development of Socio-Economic Systems» dedicated to the memory of Alexander Tatarkin (CDSES 2020), 25–26 November, 2020, Chelyabinsk State University, Russia*. London; 2021. Vol. 105-CDSES. P. 476–485. Available from: https://doi.org/10.15405/epsbs.2021.04.52.

18. **Gorbunov V.** Market Demand: A Holistic Theory and Its Verification. *MPRA Paper No. 109154. 2021*. Available from: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14974.92488.

19. **Kovalev V.V.** et al. *Theory of Statistics with Elements of Econometrics: Textbook for Academic Baccalaureate*. Moscow: Urait Publ.; 2014. (In Russ.)

20. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** *Solution of Ill-Posed Problems*. Moscow: Nauka Publ.; 1986. (In Russ.)

21. **Ivanov Yu.N.** The Debate About the Accuracy of Indicators of Macroeconomic Statistics. *Voprosy Statistiki*. 2017;1(9):10–18. (In Russ).

22. **Shananin A.A.** Nonparametric Methods for Analysis of Consumer Demand Structure. *Mathematical Models and Computer Simulations*.1993;5(9):3–17. (In Russ).

23. **Kondrakov I.A., Pospelova L.Ya., Shananin A.A.** Generalized Nonparametric Method. Application to the Analysis of the Commodity Markets. *Proceedings of MIPT*. 2010;2(3):32–45. (In Russ).

About the authors

Vladimir K. Gorbunov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Digital Economics, Ulyanovsk State University. 42, Leo Tolstoy Street, Ulyanovsk, 432017, Russia. E-mail: vkgorbunov@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5276-0501.

Alexander G. Lvov – Cand. Sci. (Econ.), Leading Specialist, AirBridgeCargo Airlines LLC. 28B, Mezhdunarodnoye Shosse, Moscow, 141411, Russia. E-mail: aglvov@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6726-8234.

Funding

The research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research, Project No. 19-010-00972 «Development of Mathematical Models for the Analysis and Regulation of National Consumer Markets and Production».