

РАЗВИТИЕ МЕТОДА RAS НА ОСНОВЕ ГОМОТЕТИЧЕСКОЙ ПАРАДИГМЫ СТРУКТУРНОГО СХОДСТВА МАТРИЦ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ДАННЫХ

В.И. Моторин, канд. экон. наук,

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Введение. Применение математических методов для актуализации (updating) и прогнозирования (projection) национальных счетов, таблиц ресурсов и использования товаров и услуг, таблиц «затраты - выпуск» порождает целый класс прикладных алгебраических задач, связанных с оценкой полиситуационных изменений в различных фрагментах данных перечисленных статистических таблиц. Общая задача математической актуализации массива макроэкономических данных в наиболее простом, но представляющем значительную прикладную ценность двухситуационном двумерном случае формулируется следующим образом:

пусть заданы исходная прямоугольная матрица (initial matrix) A размерности $N \times M$ с векторами строчных и столбцовых окаймляющих итогов $u = Ae_M$ и $v' = e'_N A$, а также пара векторов $U \neq u$ и $V \neq v$ размерности $N \times 1$ и $M \times 1$ соответственно;

требуется построить целевую матрицу (target matrix) X размерности $N \times M$, обладающую как можно более тесным структурным сходством с заданной матрицей A и удовлетворяющую ограничениям в виде равенств:

$$Xe_M = U; \quad e'_N X = V'. \quad (1)$$

Здесь e_M (e_N) - суммирующий вектор-столбец (summation vector), составленный из M (N) единичных элементов, а надстрочным символом «штрих» обозначена операция транспонирования матриц (векторов). Умножив обе части первого уравнения (1) на вектор-строку e'_N слева, а обе части второго - на вектор-столбец e_M справа, получим пару скалярных равенств $e'_N X e_M = e'_N U$ и $e'_N X e_M = V' e_M$, левые части которых в точности совпадают между собой и равны сумме всех элементов целевой матрицы X . Следовательно, для обеспечения корректности постановки рассматриваемой задачи актуализации двумерного массива макроэкономических данных, строго

говоря, требуется соблюдение дополнительного условия согласованности векторов U и V в простейшей форме $e'_N U = e'_M V$, экономическая интерпретация которого очевидна. Нетрудно показать, что при выполнении условия согласованности независимыми являются любые $N+M-1$ из $N+M$ ограничений (1).

Формально векторные соотношения (1) образуют систему $N+M$ линейных уравнений с $N \times M$ неизвестными элементами матрицы X , которая при $N > 2$ и $M > 2$, вообще говоря, имеет бесконечное множество решений, поскольку число неизвестных превышает количество имеющихся уравнений. Таким образом, в практических ситуациях система (1) не представляет самостоятельного интереса. Кроме того, в ней никак не используется важная структурная информация, носителем которой выступает исходная матрица A .

На практике матрица A , как правило, ассоциируется с некоторым базовым периодом времени, а матрица X - с текущим или перспективным периодом, то есть сформулированная задача актуализации данных носит выраженный экстраполяционный характер. Вместе с тем ясно, что аналогичную задачу можно рассматривать и в интерполяционной постановке, когда целевая матрица X (вместе с ее известными окаймляющими итогами U и V) занимает на темпоральной оси промежуточное положение между известными матрицами A и B одинаковой размерности (трехситуационный случай). Необходимость применения интерполяционных методов обычно возникает при оценивании динамических рядов тех или иных статистических таблиц в интервалах от одного базового периода до другого (полиситуационная актуализация).

Инструментальные подходы. В данной выше формулировке требование обеспечить как можно более тесное структурное сходство целевой и

заданной матриц является вербальным и настоятельно нуждается в операциональной конкретизации. Формализация столь расплывчатого, но в то же время вполне содержательного требования, разумеется, может быть обеспечена множеством различных способов в зависимости от того, какие аспекты «структурного сходства» актуализированной и исходной матриц объявляются преобладающими. «Невозможно рассмотреть все методы актуализации, поскольку с теоретической точки зрения их число не ограничено» [1, р. 92].

Весьма общий инструментальный подход к оценке матрицы X связан с ее явным аналитическим представлением в виде:

$$X = \varphi(A; \alpha), \quad (2)$$

где φ - некоторая матричнозначная функция матричного аргумента A и α - совокупность (вектор или матрица) априори неизвестных числовых параметров, значения которых подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия равенства окаймляющих итогов матрицы X заданным векторам U и V . Эти условия выражаются системой $N+M$ уравнений $\varphi(A; \alpha)e_M = U$ и $e'_N \varphi(A; \alpha) = V$, откуда при согласованности окаймляющих итогов следует, что общее количество числовых параметров в рассматриваемой совокупности должно составлять не менее $N+M-1$. В рамках представления (2) структурное сходство матриц A и X обеспечивается выбором вида матричнозначной функции φ и дополнительной адаптацией «избыточных» параметров в случаях, когда их число в выбранной спецификации α превышает $N+M-1$.

Другой, не менее общий инструментальный подход к оценке матрицы X заключается в условной оптимизации (обычно минимизации) некоторой целевой функции $\varphi(X, A; \beta)$, (возможно) зависящей от нескольких экзогенных числовых параметров β , при ограничениях $Xe_M = U$ и $e'_N X = V$. Здесь структурное сходство матриц A и X полностью обеспечивается выбором вида функции φ , в качестве аргументов которой обычно используются различные нормы взвешенных разностей матриц X и A (см., например, [1, 2]).

Если решение задачи условной оптимизации целевой функции $\varphi(X, A; \beta)$ существует и единственно, то формально его можно записать в виде:

$$X = \psi(A; U, V, \beta), \quad (3)$$

где ψ - вычислимая матричнозначная функция аргумента A , зависящая от векторных параметров U, V и экзогенно заданных величин β . Таким образом, оба подхода оказываются в известном смысле эквивалентными, а видимое различие между ними носит исключительно инструмен-

тальный характер: в первом подходе зависимость X от A постулируется в явном виде, а во втором - в неявном. В связи с этим можно отметить, что главным априорным достоинством первого подхода являются его наглядность и более высокая иллюстративность.

Метод RAS: логические основы. В специальной литературе представлено обширное множество алгоритмов актуализации матриц макроэкономических данных в условиях (полного или частичного) отсутствия статистических обследований (подробные аналитические обзоры методов даны, например, в [1, 2]). Весьма популярным и широко применяемым в международной статистической практике способом решения подобных задач является предложенный Р. Стоуном [3] метод RAS и его многочисленные модификации, известные в специальной литературе как методы бипропорциональной балансировки матриц. Основная идея метода RAS (и других бипропорциональных алгоритмов) заключается в представлении зависимости искомой матрицы X от исходной A в следующем аналитическом виде:

$$X = RAS, \quad (4)$$

где $R = \langle r \rangle = \hat{r}$ и $S = \langle s \rangle = \hat{s}$ - диагональные матрицы порядка N и M с расположенными на их главных диагоналях векторами априори неизвестных числовых множителей r и s размерности $N \times 1$ и $M \times 1$ соответственно, а заключение символа вектора в специальные скобки « $\langle \cdot \rangle$ » (или знак « $\hat{\cdot}$ » над ним) обозначает его преобразование в диагональную матрицу соответствующего порядка с элементами этого вектора на главной диагонали [2, с. 697].

Таким образом, метод RAS является типичным (и простейшим) примером конкретизации инструментального подхода (2) для случая $N+M$ числовых параметров α , значения которых теоретически можно рассчитать путем решения системы $N+M$ уравнений (1).

Здесь следует заметить, что преобразование произвольного вектора d размерности $J \times 1$ в диагональную матрицу $\langle d \rangle$ порядка J допускает формальную запись в терминах умножения и сложения матриц. Для этого необходимо ввести в рассмотрение J векторов естественного базиса J -мерного пространства $\ell'_{j,1} = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\ell'_{j,2} = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\ell'_{j,j} = (0, 0, 0, \dots, 1)$ размерности $J \times 1$ и J соответствующих им диагональных матриц $\langle \ell_{j,1} \rangle, \langle \ell_{j,2} \rangle, \dots, \langle \ell_{j,j} \rangle$. Как нетрудно убедиться, все элементы матрицы $\langle \ell_{j,j} \rangle d \ell'_{j,j}$ порядка J равняются нулю за исключением (j, j) -го элемента, равного

d_j . Следовательно, диагональная матрица $\langle d \rangle$ с элементами вектора d на главной диагонали может быть представлена аддитивным разложением $\langle d \rangle = \sum_{j=1}^J \langle \ell_{j,j} \rangle d \ell'_{j,j}$.

Обратное преобразование диагональной матрицы $\langle d \rangle$ в вектор d легко формализуется с помощью суммирующего вектора: $d' = e'_j \langle d \rangle$ и $d = \langle d \rangle e_j$. Другое важное свойство диагональных матриц связано с коммутативностью их умножения: если матрицы $\langle c \rangle$ и $\langle d \rangle$ имеют одинаковый порядок, то $\langle c \rangle \langle d \rangle = \langle d \rangle \langle c \rangle$; нетрудно также показать, что $\langle d' \rangle = \langle d \rangle$, $\langle d' \rangle' = \langle d \rangle$, $\langle c \rangle d = \langle d \rangle c$ и $c' \langle d \rangle = d' \langle c \rangle$.

Подставив матричную формулу (4) в систему (1), получим нелинейную систему $N+M$ уравнений с $N+M$ неизвестными элементами векторов r и s :

$$\begin{aligned} \langle r \rangle A \langle s \rangle e_M &= \langle r \rangle A s = U; \\ e'_N \langle r \rangle A \langle s \rangle &= r' A \langle s \rangle = V', \end{aligned} \quad (5)$$

уравнения которой, как отмечалось выше, не являются независимыми, и поэтому, несмотря на формальное равенство числа неизвестных количеству уравнений, вопрос о существовании и единственности решения системы (5) требует дополнительного изучения.

Пусть $r^{(1)}$ и $s^{(1)}$ - некоторое решение системы (5). Положим $r^{(2)} = \delta r^{(1)}$ и $s^{(2)} = 1/\delta \cdot s^{(1)}$, где δ - некоторая скалярная константа (см., например, [4]). Нетрудно видеть, что эти векторы также оказываются решениями системы (5) при любых значениях $\delta \neq 0$, поскольку

$$\langle r^{(2)} \rangle A s^{(2)} = \langle \delta r^{(1)} \rangle A \left(\frac{1}{\delta} s^{(1)} \right) = \langle r^{(1)} \rangle A s^{(1)} = U$$

и

$$\langle s^{(2)} \rangle A' r^{(2)} = \left\langle \frac{1}{\delta} s^{(1)} \right\rangle A' \delta r^{(1)} = \langle s^{(1)} \rangle A' r^{(1)} = V.$$

Таким образом, если решение системы (5) существует, то оно не является единственным, а определяет бесконечное однопараметрическое семейство решений. Вместе с тем ясно, что любой паре представителей этого семейства соответствует одна и та же актуализированная матрица (4), так как

$$\begin{aligned} \langle r^{(2)} \rangle A \langle s^{(2)} \rangle &= \langle \delta r^{(1)} \rangle A \left\langle \frac{1}{\delta} s^{(1)} \right\rangle = \\ &= \delta \frac{1}{\delta} \langle r^{(1)} \rangle A \langle s^{(1)} \rangle = \langle r^{(1)} \rangle A \langle s^{(1)} \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому в терминах целевой матрицы X можно считать решение системы (5) единственным (разумеется, если оно существует).

Тем не менее продемонстрированная выше неоднозначность решения системы уравнений (5) в терминах переменных векторов r и s , с одной стороны, ставит под сомнение их «классическую» экономическую интерпретацию как факторов замещения (substitution effects) и факторов формирования добавленной стоимости (fabrication effects) соответственно [3], а с другой стороны, опровергает точку зрения тех авторов, которые считают метод RAS «чисто математической процедурой» [2, р. 329]. Так, если исходная матрица A представляет собой матрицу выпуска или промежуточного использования товаров и услуг, записанную в обычном для межотраслевого анализа формате «продукты - отрасли», то r естественно рассматривать как вектор индексов цен на продукты, а s - как вектор индексов физических объемов выпуска или расходов на промежуточное потребление в отраслях. В подобном случае построенное выше однопараметрическое семейство решений системы уравнений (5) описывает спектр допустимых совместных вариаций индексов цен и физических объемов при условии постоянства стоимостных объемов выпуска или промежуточного потребления всех продуктов во всех отраслях.

Метод RAS: алгоритмы. Используя свойства диагональных матриц, в силу которых $r' A \langle s \rangle = s \langle A' r \rangle$ и $\langle r \rangle A s = \langle A s \rangle r$, приведем систему нелинейных уравнений (5) к виду

$$\langle A s \rangle r = U; \quad \langle A' r \rangle s = V. \quad (6)$$

откуда при условии невырожденности соответствующих диагональных матриц имеем:

$$r = \langle A s \rangle^{-1} U; \quad (7)$$

$$s = \langle A' r \rangle^{-1} V. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) характеризуют перекрестную взаимозависимость неизвестных переменных исходной системы (6): уравнение (7) выражает вектор r через компоненты s , а уравнение (8), наоборот, выражает вектор s через компоненты r . Здесь следует подчеркнуть, что вычислительная сложность формул (7) и (8) и им подобных невелика, поскольку обращение диагональных матриц является весьма простой операцией.

Преобразуем систему (7), (8) подстановкой уравнения (8) в (7):

$$r = \langle A \langle A'r \rangle^{-1} V \rangle^{-1} U; \quad (9)$$

$$s = \langle A'r \rangle^{-1} V. \quad (10)$$

С другой стороны, эту систему можно также преобразовать путем подстановки формулы (7) в (8):

$$r = \langle As \rangle^{-1} U; \quad (11)$$

$$s = \langle A' \langle As \rangle^{-1} U \rangle^{-1} V. \quad (12)$$

Итак, исходная система (6) записывается в трех эквивалентных формах (7) и (8), (9) и (10), (11) и (12), внешние различия между которыми проявляются в том, что неизвестным в уравнении (9) является только вектор r , в уравнении (12) – только вектор s , а в остальных уравнениях векторные переменные r и s фигурируют совместно. Необходимо также подчеркнуть, что уравнения (7) и (11), (8) и (10) попарно идентичны. Следовательно, решение исходной системы (6) теоретически можно получить, разрешив уравнение (9) относительно r и подставив результат в уравнение (10) с целью вычисления s или разрешив уравнение (12) относительно s и подставив результат в уравнение (11) для расчета r .

Поскольку аналитическое решение уравнений (9) и (12) весьма затруднительно (если вообще возможно), в этой ситуации не остается ничего другого, как прибегнуть к численным методам. Заметим, что уравнения (9) и (12) записаны в форме, удобной для применения метода последовательных приближений. Поэтому решения этих уравнений можно найти на основе реализации итерационных процессов (разумеется, при условиях сходимости последних) по формулам:

$$r_{(i)} = \langle A \langle A'r_{(i-1)} \rangle^{-1} V \rangle^{-1} U, \quad i = 1 \div I; \quad (13)$$

$$s_{(j)} = \langle A' \langle As_{(j-1)} \rangle^{-1} U \rangle^{-1} V, \quad j = 1 \div J, \quad (14)$$

где i и j – номера итераций; $r_{(i)}$ – расчетный вектор r на i -й итерации процесса (11); $s_{(j)}$ – расчетный вектор s на j -й итерации процесса (12); $r_{(0)}$ и $s_{(0)}$ – экзогенно задаваемые векторы начальных условий реализации итерационных процессов (11) и (12), а символ « $\div$ » между нижней и верхней границами диапазона изменения индекса означает, что индекс последовательно пробегает все целочисленные значения в указанном диапазоне.

Систему (7) и (8) также можно решить на итерационной основе, однако в этом случае ите-

рационный процесс должен быть организован по двухэтапной схеме:

$$r_{(i)} = \langle As_{(i-1)} \rangle^{-1} U, \quad s_{(i)} = \langle A'r_{(i)} \rangle^{-1} V, \quad i = 1 \div I, \quad (15)$$

или

$$s_{(j)} = \langle A'r_{(j-1)} \rangle^{-1} V, \quad r_{(j)} = \langle As_{(j)} \rangle^{-1} U, \quad i = 1 \div I. \quad (16)$$

В двухэтапном процессе (15) в качестве начального условия используется вектор $s_{(0)}$, который подставляется в правую часть уравнения (7), а затем выполняется подстановка расчетной левой части уравнения (7) в правую часть уравнения (8). Напротив, в двухэтапном процессе (16) в качестве начального условия выступает вектор $r_{(0)}$, который подставляется в правую часть уравнения (8), а затем производится подстановка расчетной левой части уравнения (8) в правую часть уравнения (7).

Экзогенный выбор начальных условий реализации итерационных процессов (13) – (16) ограничивается только естественным требованием отсутствия в векторах $r_{(0)}$ и $s_{(0)}$ нулевых и отрицательных элементов. В практических расчетах удобно полагать $r_{(0)} = e_N$ и $s_{(0)} = e_M$ или рассчитать попарные отношения окаймляющих итогов целевой и исходной матриц: $r_{(0)} = \langle Ae_M \rangle^{-1} U$ и $s_{(0)} = \langle A'e_N \rangle^{-1} V$.

При одном и том же начальном условии $r_{(0)}$ итерационные процессы (13) и (15) приводят к одинаковым результатам; процессы (14) и (16) также демонстрируют аналогичное свойство. При различных начальных условиях все четыре пары векторов r и s , вычисляемых с помощью итерационных алгоритмов (13) – (16), вообще говоря, не совпадают друг с другом, однако определяют одну и ту же матрицу X .

Скорость сходимости итерационных процессов (13) – (16) в существенной степени зависит от размерности актуализируемой матрицы, но в большинстве практических случаев оказывается вполне приемлемой. Количество итераций I или J , требуемое для решения исходной системы уравнений (6) с некоторой точностью, наряду с начальным условием определяется выбором формы и параметров терминального критерия, в качестве которого рекомендуется использовать ту или иную меру абсолютных или относительных отклонений расчетных векторов $A'r$ и As от V и U соответственно.

Анализ условий сходимости итерационных процессов (13) – (16), то есть формальное опи-

сание класса матриц A , для которых указанные процессы сходятся, представляет собой весьма сложную математическую задачу. Тем не менее из общих соображений ясно, что матрица A не должна быть «чрезмерно» разреженной, в частности иметь менее $N+M$ ненулевых элементов, либо включать строки (столбцы) с единственным ненулевым элементом, либо содержать пары строк и столбцов с четырьмя ненулевыми элементами в их пересечениях. Поэтому на практике целесообразно «очистить» исходную матрицу от нежелательных особенностей до применения метода RAS.

Если некоторые элементы матрицы X известны (или вычислены) заранее, то перед выполнением процедуры бипропорциональной балансировки их следует заменить нулями с соответствующей корректировкой окаймляющих итогов, а после завершения балансировки инкорпорировать исключенные элементы в расчетную матрицу (этот алгоритм известен в литературе как модифицированный метод RAS - см., например, [5]). Наконец, если матрица A содержит отрицательные элементы, то самый простой путь - воспользоваться практическими рекомендациями из [6, р. 88] по применению RAS в подобных ситуациях, а существенно более сложный - применить предложенную там же процедуру GRAS (*generalized RAS*, то есть обобщенный метод RAS) с последующими уточнениями и поправками, изложенными, в частности, в [1].

Гомотетия матриц. В методе RAS структурное сходство матриц A и X обеспечивается выбором вида зависимости X от A в форме (4), в соответствии с которой элементы актуализированной матрицы x_{nm} связаны с одноименными элементами исходной матрицы a_{nm} мультипликативной $(N+M)$ -параметрической моделью:

$$x_{nm} = r_n s_m a_{nm}, \quad n = 1 \div N, \quad m = 1 \div M. \quad (17)$$

Таким образом, структурное сходство матриц с позиций метода RAS выражается в том, что элементы искомой матрицы x_{nm} отличаются от элементов a_{nm} множителями $r_n s_m = \|rs'\|_{nm}$, значения которых определяются по двухпараметрической схеме на основе решения системы уравнений (5) и тем самым гарантируют выполнение условий (1). Наличие заданных окаймляющих итогов препятствует неоправданному совместному увеличению или уменьшению элементов векторов

r и s , в известной мере ограничивая рассеяние множителей $r_n s_m$ вокруг некоторого постоянного уровня. Кроме того, мультипликативная модель (17) обеспечивает сохранение нулевых элементов матрицы A на тех же самых позициях в актуализированной матрице, что, несомненно, вносит существенный «вклад» в структурное сходство матриц A и X .

Рассмотрим вспомогательную задачу актуализации матрицы A в частной ситуации строгой пропорциональности окаймляющих итогов матриц A и X , то есть при $U = ku$ и $V = kv$, где k - некоторый скалярный коэффициент. Нетрудно убедиться, что в этом случае метод RAS при начальных условиях $r_{(0)} = e_N$ или $s_{(0)} = e_M$ сходится за одну итерацию к либо к паре векторов $r = e_N$ и $s = ke_M$, либо к паре векторов $r = ke_N$ и $s = e_M$ соответственно, откуда $r_n s_m = k$ для всех значений $n = 1 \div N, m = 1 \div M$. Таким образом, в соответствии с логикой метода RAS и мультипликативной модели (17) единственным решением вспомогательной задачи актуализации A , очевидно, является матрица $X = kA$, или гомотетия исходной матрицы A с центром в нулевой матрице и скалярным коэффициентом k .

Разумеется, строгой пропорциональности окаймляющих итогов матриц A и X в общем случае не наблюдается. Тем не менее важно подчеркнуть, что гомотетическое преобразование исходной матрицы доставляет единственное решение ослабленной модификации сформулированной выше общей задачи актуализации двумерного массива макроэкономических данных, в которой векторные условия (1) заменены скалярным равенством суммы элементов искомой матрицы X экзогенно заданной величине $\Sigma = e'_N U = e'_M V$:

$$e'_N X e_M = \Sigma. \quad (18)$$

Действительно, подставив формулу матричной гомотетии $X = kA$ с неизвестным коэффициентом в уравнение (18) и разрешив его относительно k , получим $k^* = \Sigma / e'_N A e_M$ при необременительном условии, что сумма всех элементов матрицы A не равна нулю. Таким образом, единственным решением ослабленной задачи актуализации A служит матрица:

$$B = k^* A = e'_N U / e'_N A e_M \cdot A = e'_M V / e'_N A e_M \cdot A \quad (19)$$

с нулевыми элементами на тех же самых позициях, что и в матрице A . Дополнительным свидетельством «идеального» структурного сходства матриц

B и A является тот факт, что все итерации метода RAS инвариантны относительно замены A на B . В этом нетрудно убедиться, подставив $B = k^*A$ вместо исходной матрицы A в формулы итерационных процессов (13) и (14). Заметим также, что одной и той же матрице B , вообще говоря, могут соответствовать различные окаймляющие итоги U и V , удовлетворяющие условию $e'_N U = e'_M V = \Sigma$.

При использовании в методе RAS гомотетии (19) вместо исходной матрицы A мультипликативная $(N+M)$ -параметрическая модель (17) в матричной форме принимает вид $X = (rs') \circ B$, где символом « $\circ$ » обозначена операция поэлементного (адамарова) произведения матриц. Здесь необходимо отметить, что поскольку все компоненты векторов r, s и, следовательно, элементы матрицы rs' размерности $N \times M$ не равны нулю, матрицы X, B и A имеют идентичное расположение нулевых элементов.

Вполне естественный способ обобщения $(N+M)$ -параметрической модели $X = (rs') \circ B$ связан с заменой множителей $r_n s_m$ на коэффициенты общего вида q_{nm} в рамках перехода к мультипликативной (NM) -параметрической модели:

$$X = Q \circ B, \quad (20)$$

где Q - матрица коэффициентов q_{nm} размерности $N \times M$. Выполнение условий (1) при использовании этой модели обеспечивается сдвигами коэффициентов q_{nm} вправо или влево от единичного значения.

Основная аналитическая ценность предпринятого обобщения заключается в том, что модель (20) можно идентифицировать для любой пары известных матриц A и X с одинаковым расположением нулевых элементов независимо от примененного метода оценивания целевой матрицы X . При этом достаточно положить $B = k^*A = e'_N X e_M / e'_N A e_M \cdot A$, и

$$q_{nm} = \begin{cases} x_{nm} / b_{nm}, & \text{если } b_{nm} \neq 0; \\ c, & \text{если } b_{nm} = 0, \end{cases} \quad n=1 \div N, m=1 \div M \quad (21)$$

где c - некоторая заранее выбранная и отличная от нуля константа (например, $c = 1$). Подобный подход открывает широкие возможности для построения операционального измерителя степени структурного сходства целевой матрицы X и матриц из гомотетического семейства kA .

Так как адамарово произведение не согласуется с операциями обычной матричной алгебры,

возникает инструментальная проблема записи модели (20) в аналитической форме, удобной для проведения дальнейших выкладок. В соответствии с известным приемом [7, с. 56] для этого требуется преобразовать матрицы B, Q и X размерности $N \times M$ в векторы b, q и x размерности $NM \times 1$, составленные из столбцов одноименных матриц (то есть провести их столбцовую векторизацию).

Введем в рассмотрение M векторов естественного базиса M -мерного линейного пространства $\ell'_{M,1} = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\ell'_{M,2} = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\ell'_{M,M} = (0, 0, 0, \dots, 1)$. Ясно, что вектор $B \ell'_{M,m}$ размерности $N \times 1$ представляет собой m -ый столбец матрицы B . Построим блочную матрицу $\ell_{M,m} \otimes E_N$ размерности $NM \times N$, где E_N - единичная матрица порядка N , а $\otimes$ - символ кронекерова (прямого, тензорного) произведения матриц [8, п. 11.51, с. 80]. Она состоит из M расположенных по вертикали квадратных блоков порядка N , причем m -ый блок совпадает с единичной матрицей E_N , а остальные блоки матрицы заполнены нулевыми элементами. Как нетрудно убедиться, при умножении матрицы $\ell_{M,m} \otimes E_N$ на некоторый вектор-столбец размерности $N \times 1$ возникает вектор-столбец размерности $NM \times 1$ с этим вектором-сомножителем на месте m -го блока и остальными элементами, равными нулю. Следовательно, векторное представление матрицы B может быть записано в виде аддитивного разложения $b = \sum_{m=1}^M (\ell_{M,m} \otimes E_N) B \ell'_{M,m}$.

Легко проверить, что обратное преобразование с учетом правила сохранения порядка следования сомножителей кронекерова произведения при транспонировании задается формулой:

$$B = \sum_{m=1}^M (\ell_{M,m} \otimes E_N)' b \ell'_{M,m} = \sum_{m=1}^M (\ell'_{M,m} \otimes E_N) b \ell'_{M,m}. \quad (22)$$

Действительно, вектор $(\ell'_{M,m} \otimes E_N) b$ размерности $N \times 1$ совпадает с m -ым столбцом матрицы B , а последующее умножение на вектор-строку $\ell'_{M,m}$ помещает его на нужную позицию в матрице $(\ell'_{M,m} \otimes E_N) b \ell'_{M,m}$ размерности $N \times M$.

Аналогичные формулы справедливы для матриц Q и X той же размерности. В итоге мультипликативная модель (20) преобразуется в обычное матричное произведение диагональной матрицы на вектор-столбец:

$$x = \langle b \rangle q = \hat{b} q, \quad (23)$$

где x и q – результаты столбцовой векторизации матриц X и Q соответственно. Заметим, что в случае наличия в исходной матрице A нулевых элементов диагональная матрица $\hat{b} = \langle b \rangle$ оказывается вырожденной.

Угловая мера структурного сходства матриц.

Пусть в результате применения того или иного способа построения матрицы X размерности $N \times M$, удовлетворяющей условиям (1), например метода RAS, и после столбцовой векторизации матриц A , B и X получены векторы a , b и x размерности $NM \times 1$. Напомним, что b и a связаны соотношением $a = b/k^*$, аналогичным (19), откуда $e'_{NM}b = e'_N U = \sum = e'_M V = e'_{NM}x$ (то есть суммы элементов матриц B и X совпадают).

Таким образом, в геометрическом представлении имеющиеся данные отображаются гомотетическим лучом kb при $k \geq 0$ с лежащими на нем коллинеарными векторами a и b , а также вектором x , который образует с гомотетическим лучом острый угол. Взаимное расположение векторов a , b , x и гомотетического луча в NM -мерном пространстве при $k^* > 1$ иллюстрируется рис. 1.

Естественной мерой структурного сходства известной целевой матрицы X и матриц из гомотетического семейства kA (или kB) может служить величина угла между вектором x и гомотетическим лучом. Если $(y, z) = y'z = z'y$ - скалярное произведение векторов y и z в NM -мерном евклидовом пространстве, то угол α_{xa} между векторами x и a определяется известной формулой:

$$\begin{aligned} \alpha_{xa} = \alpha_{xb} &= \arccos \left[\frac{(x, b)}{|x| \cdot |b|} \right] = \\ &= \arccos \left[\frac{b'x}{(x'x)^{1/2} \cdot (b'b)^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

где $|b| = (b'b)^{1/2}$ - модуль вектора b . Так как величина угла в (24) измеряется в радианах, для его перевода в градусную меру в правую часть (24) необходимо ввести масштабный множитель $180/\pi$.

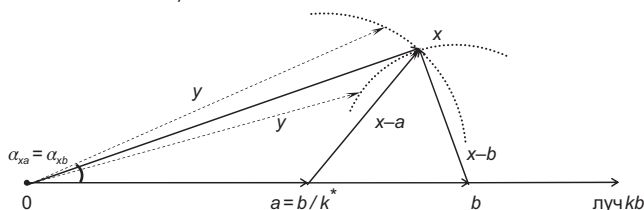


Рис. 1. Векторные представления матриц A , B и X в исходных координатах

Угловая мера (24) позволяет оценивать степень структурного сходства (или, точнее, несходства) целевой матрицы и матриц из гомотетического семейства, порождаемого исходной матрицей, единственной скалярной величиной при обратном порядке ранжирования. Если при решении задачи актуализации матрицы A двумя различными методами получены целевые матрицы $X(1)$, $X(2)$ и соответствующие им векторизации $x(1)$, $x(2)$, то с позиций гомотетической парадигмы структурного сходства матриц макроэкономических данных, можно утверждать, что лучшим является решение, соответствующее минимальному углу из пары $\alpha_{x(1)b}$ и $\alpha_{x(2)b}$. К сожалению, операциональность введенной угловой меры оставляет желать лучшего, поскольку она выражается довольно сложной формулой, дальнейшие аналитические преобразования которой затруднительны. В связи с этим вполне логичной представляется попытка построить (на фоне естественной угловой меры) более простые метрические измерители структурного сходства целевой и исходной матриц, удобные для использования в различных алгоритмических конструкциях.

Прежде всего рассмотрим возможности использования векторов $x - a$ или $x - b$ в качестве базы для измерения степени структурного сходства X и A или B . Разности $x - a$ и $x - b$ не ортогональны гомотетическому лучу kb , поскольку в общем случае $a'x \neq a'a$ и $b'x \neq b'b$. Важно подчеркнуть, что при заданной величине $|x - a|$ (или $|x - b|$) вектор $y = x$ не всегда является единственным вектором, удовлетворяющим эквидистантному условию $|y - a| = |x - a|$ (или $|y - b| = |x - b|$) при заданных окаймляющих итогах (1). Проиллюстрируем это утверждение простым примером.

Пусть χ - любая подматрица второго порядка прямоугольной матрицы $X=A$, не «накрывающая» нулевые элементы матриц X и A и образованная элементами χ_{11} , χ_{12} , χ_{21} и χ_{22} . Рассмотрим возмущенную матрицу $\tilde{\chi}(\varepsilon) = \chi + \varepsilon \cdot (1, -1)(1, -1)$, где ε - неизвестный скалярный параметр вносимого возмущения. Нетрудно видеть, что $e'_2 \tilde{\chi}(\varepsilon) = e'_2 \chi$ и $\tilde{\chi}(\varepsilon) e_2 = \chi e_2$ при любом выборе ε . Приравняв суммы квадратов элементов матриц χ и $\tilde{\chi}(\varepsilon)$, получим неполное квадратное уравнение $4\varepsilon^2 + 2\varepsilon(\chi_{11} - \chi_{12} - \chi_{21} + \chi_{22}) = 0$, которое наряду с нулевым решением имеет нетривиальный корень $\varepsilon^* = -\frac{1}{2}(\chi_{11} - \chi_{12} - \chi_{21} + \chi_{22})$, вообще говоря, отличный от 0. Следовательно, замена в матрице $X=A$ подматрицы χ на ее возмущенную версию $\tilde{\chi}(\varepsilon^*)$

оставляет неизменными не только столбцовые и строчные суммы элементов $X-A$, но и общую сумму их квадратов.

Можно показать, что если матрица X является решением задачи минимизации квадратичной функции $(x-a)'(x-a)$ при заданных окаймляющих итогах (1), то все подматрицы второго порядка χ матрицы $X-A$ обладают свойством $\chi_{11} - \chi_{12} - \chi_{21} + \chi_{22} = 0$, то есть полученное выше неполное квадратное уравнение имеет два нулевых корня. В этой ситуации внести допустимое возмущение в $X-A$ невозможно, так как вектор $y = x$ является единственным вектором, удовлетворяющим эквидистантному условию $|y-a| = |x-a|$ при заданных окаймляющих итогах (1).

Многочисленное применение изложенного приема к различным подматрицам второго порядка матрицы $X-A$ (или $X-B$) в общем случае позволяют генерировать другие допустимые варианты вектора $y-a$ (или $y-b$), соединяющего точку a (или точку b) со сферической поверхностью, которая определяется уравнением $|y-a| = |x-a|$ (или $|y-b| = |x-b|$). На рис. 1 эти сферические поверхности схематически представлены в виде пунктирных дуг окружностей радиусов $|x-a|$ и $|x-b|$ с центрами в точках a и b соответственно, а два различных возможных положения вектора y (возмущенного вектора x) изображены штриховыми линиями со стрелками.

Таким образом, на основе проведенного анализа можно сделать вывод об отсутствии четкой взаимосвязи модулей векторов $x-a$ и $x-b$ с величиной угла между вектором x и гомотетическим лучом и, как следствие, об ограниченной адекватности их применения в качестве базы для метрического измерения степени структурного сходства целевой и исходной матриц. Из геометрических соображений следует (см. рис. 1), что улучшить ситуацию позволяет выбор вектора-измерителя из ортогонального дополнения к гомотетическому лучу.

Вместе с тем, поскольку $e'_{NM}b = e'_{NM}x \neq e'_{NM}a$, вектор $x-b$ в отличие от $x-a$ имеет нулевую сумму компонент, что облегчает его статистическую интерпретацию в рамках дисперсионного анализа. С позиций общей теории оценивания параметров в математической статистике логика принятия вектора $x-b$ вместо $x-a$ в качестве базы для измерения степени структурного сходства целевой и исходной матриц соответствует отказу от смещенной оценки в пользу несмещенной. Кроме

того, при одновременном устремлении $U \rightarrow k*u$ и $V \rightarrow k*v$ при постоянной величине $\Sigma = e'_N U = e'_M V$ вектор x стремится к b . Приведенные соображения очерчивают определенные аналитические преимущества использования вектора $x-b$ по сравнению с $x-a$ в различных алгоритмических схемах. К сожалению, подобные методы не представляют существенной практической ценности, так как не обеспечивают сохранение нулей матриц A и B в матрице X .

Метрическая мера структурного сходства матриц. Перейдем к обсуждению возможностей ортогонального проектирования вектора x на гомотетический луч kb , которое обеспечивает более четкую взаимосвязь метрических и угловых измерителей его отклонения от гомотетического луча, обусловленную положением сферической поверхности с центром в точке проекции x на гомотетический луч. Ортогональная проекция определяется коэффициентом $k^\perp = b'x / b'b$, при котором $b'(x - k^\perp b) = 0$, и равняется вектору $k^\perp b$. На рис. 2 представлена ситуация, когда $k^\perp < 1$, однако в других случаях значения коэффициента могут превышать единицу. Сумма компонент вектора:

$$d = x - k^\perp b = x - b \frac{b'x}{b'b} = \left(E_{NM} - \frac{bb'}{b'b} \right) x \quad (25)$$

составляет $e'_{NM}d = (1 - k^\perp)e'_{NM}b$, то есть обращается в нуль только при $k^\perp = 1$, когда b является ортогональной проекцией x .

Нетрудно показать, что симметричная матрица в правой части формулы (25) является идемпотентной и вырожденной. Она имеет нулевое собственное значение единичной кратности, которому соответствует собственный вектор b , и единичное собственное значение кратности $NM-1$, которому соответствует любой вектор z на гиперплоскости $b'z = 0$, ортогональной гомотетическому лучу. Далее, идемпотентная матрица $bb' / b'b$ ранга 1 имеет единичное собственное значение кратности 1, которому соответствует собственный вектор b , и нулевое собственное значение кратности $NM-1$, которому соответствует любой вектор из гиперплоскости, ортогональной гомотетическому лучу.

Геометрическая интерпретация вектора (25) очевидна: он характеризует кратчайший путь из точки x до гомотетического луча kb . Будучи векто-

ром с ненулевой суммой компонент, d допускает разложение на два векторных слагаемых $\bar{d}e'_{NM}$ и $t = d - \bar{d}e'_{NM}$, где $\bar{d} = (1 - k^\perp) \bar{b}$, а черта над символом вектора обозначает среднее значение его компонент. Эти слагаемые ортогональны друг другу, так как по определению средней величины вектор t имеет нулевую сумму компонент $e'_{NM} t = e'_{NM} d - \bar{d} e'_{NM} e'_{NM} = 0$, откуда $\bar{d} e'_{NM} t = 0$.

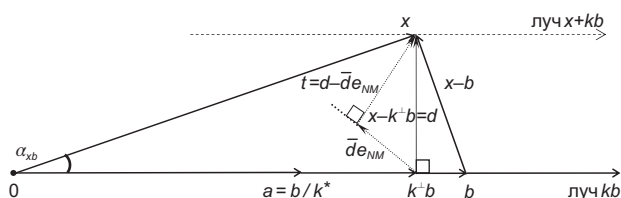


Рис. 2. Проекция вектора x на гомотетический луч в исходных координатах

Для пары некомпланарных прямоугольных треугольников с гипотенузами d и $x-b$ и общей стороной d , изображенных на рис. 2, справедливо нестрогое двойное неравенство $|x-b| \geq |x-k^\perp b| \geq |x-k^\perp b - \bar{d}e'_{NM}|$, в котором равенства достигаются только при $k^\perp = 1$, то есть в условиях ортогональности вектора $x-b$ гомотетическому лучу kb , $k \geq 0$. Таким образом, с позиций общей теории оценивания параметров в математической статистике, логика использования вектора d вместо $x-b$ в качестве базы для измерения степени структурного сходства целевой и исходной матриц соответствует отказу от несмещенной оценки с высокой дисперсией в пользу смещенной оценки с более низкой дисперсией и меньшим средним квадратом ошибки оценивания (*mean square error* - см., например, [9, p. 393, 394]).

В итоге из очевидных векторных равенств $x = b + (x-b) = k^\perp b + d$ вытекает трехкомпонентное разложение $x = k^\perp b + \bar{d}e'_{NM} + t$, в котором первое векторное слагаемое ортогонально сумме двух остальных, а второе слагаемое - третьему. С помощью формул (22) ему можно поставить в соответствие матричное разложение $X = k^\perp B + \bar{d}e'_N e'_M + T$, где $e'_N e'_M$ - матрица размерности $N \times M$, все элементы которой равны единице, а T - матрица той же размерности с нулевой суммой элементов.

Здесь, как и ранее, возникает вопрос о взаимном соответствии величин угла α_{xb} и модуля вектора d , который в отличие от $x-b$ не имеет закрепленного начала и при допустимом варьировании x может «дрейфовать» по гомотетическому

лучу и поворачиваться вокруг него в ортогональной гиперплоскости. Интересно отметить, что на параллельном луче $x + kb$, где k - произвольная постоянная, не обнаруживается других (отличных от x) решений задачи актуализации матрицы A при заданных окаймляющих итогах U и V . В самом деле, из уравнений $(X + kB)e'_M = U$ и $e'_N(X + kB) = V'$ имеем $kU = 0$, $kV' = 0$ и, следовательно, $k = 0$, то есть матрица X является единственным представителем однопараметрического семейства $X + kB$, удовлетворяющим условиям (1).

Аналитическая связь (25) с угловой мерой (24) определяется следующими формулами, вытекающими из геометрических построений на рис. 2:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_{xb} &= \frac{(k^\perp b)' k^\perp b}{x' x} = \frac{x' b b' x}{b' b \cdot x' x}; \\ d' d &= x' \left(E_{NM} - \frac{b b'}{b' b} \right) x = x' x \cdot (1 - \cos^2 \alpha_{xb}) = \\ &= x' x \cdot \sin^2 \alpha_{xb}. \end{aligned} \quad (26)$$

Чтобы уточнить область применения d для сопоставления различных решений задачи актуализации матрицы A при окаймляющих итогах U и V , перепишем второе уравнение (26) в форме $\sin^2 \alpha_{xb} = d' d / (x' b b' x / b' b + d' d)$, то есть представим квадрат синуса угла α_{xb} в виде дробно-линейной функции аргумента $d' d$.

Функция $f(z) = z / (c + z)$, зависящая от числового параметра $c > 0$, монотонно возрастает при изменении аргумента z от 0 до ∞ и при постоянстве параметра c реализует взаимно однозначное соответствие между множествами значений z и $f(z)$. Поэтому условием корректного сопоставления решений задачи актуализации исходной матрицы является постоянство величины $x' b b' x / b' b$, которое означает совпадение ортогональных проекций на гомотетический луч для всех анализируемых решений при окаймляющих итогах U и V , определяющих одну и ту же матрицу B .

Таким образом, в силу (26) метрический измеритель (25) оказывается согласованным с угловой мерой (24) только при сравнении любых пар решений x и y , обладающих свойством $b'(x - y) = 0$. При соблюдении этого условия вектор d в отличие от $x-b$ можно использовать для сопоставления различных решений по степени структурного сходства вариантов целевой матрицы с матрицей A в соответствии с правилом обратного ранжи-

рования: чем меньше модуль вектора (25), тем лучше решение.

Вместе с тем очевидную «жесткость» условия $b'(x - y) = 0$ можно считать конструктивным недостатком рассмотренного способа метрического измерения степени структурного сходства целевой и исходной матриц. Важно также подчеркнуть, что в представленных на рис. 1 и 2 геометрических построениях и сопутствующих им аналитических выкладках пока не использовалась мультипликативная модель (23), обеспечивающая сохранение нулевых элементов матриц A и B в матрице X на тех же самых позициях.

Гомотетическая мера структурного сходства матриц. Поскольку в силу (23) $x = \hat{b}q$, операцию ортогонального проектирования на гомотетический луч можно реализовать не только в исходных, но в относительных координатах. Образом вектора x в системе относительных координат, очевидно, служит вектор безразмерных коэффициентов q , образом гомотетического луча kb – луч ke_{NM} при $k \geq 0$, а образом вектора b – вектор e_{NM} . Следовательно, чтобы перейти в правой части (25) от исходных координат к относительным, достаточно повсеместно заменить вектор b на его относительный эквивалент e_{NM} . С учетом замены x на q имеем:

$$\delta = \left(E_{NM} - \frac{e_{NM}e'_{NM}}{e'_{NM}e_{NM}} \right) q = q - \bar{q}e_{NM}, \quad (27)$$

где δ – разность между вектором q и его ортогональной проекцией на гомотетический луч ke_{NM} .

Симметричная идемпотентная матрица в (27) имеет нулевое собственное значение единичной кратности, которому соответствует собственный вектор e_{NM} , и единичное собственное значение кратности $NM-1$, которому соответствует любой вектор z на гиперплоскости $e'_{NM}z = 0$, ортогональной гомотетическому лучу ke_{NM} , $k \geq 0$. Следовательно, она вырождена, а ее ранг равен $NM-1$ [7, с. 43]. Далее,

$$e'_{NM}\delta = e'_{NM}q - \frac{e'_{NM}e_{NM}e'_{NM}}{e'_{NM}e_{NM}}q = e'_{NM}q - e'_{NM}q = 0,$$

откуда вытекает, что вектор δ ортогонален гомотетическому лучу ke_{NM} и одновременно обладает свойством нулевой суммы компонент. Таким образом, вектор δ соответствует кратчайшему пути из точки q до гомотетического луча ke_{NM} .

При этом ортогональная проекция вектора q на гомотетический луч определяется коэффициентом, равным среднему значению $\bar{q}$. Рис. 3 служит иллюстрацией взаимного расположения всех рассматриваемых векторов и гомотетического луча в относительных координатах.

Следует подчеркнуть, что вектор $q - e_{NM}$ отличие от своего прообраза в исходных координатах $x - b = \hat{b}(q - e_{NM})$ не демонстрирует нулевую сумму компонент, и наоборот, сумма компонент вектора δ равна нулю в отличие от его аналога d (заметим, что $d \neq \hat{b}\delta$). В связи с этим теперь становится понятным, как специфицировать константу c при расчете элементов матрицы Q с помощью сформулированного выше правила (21): ее следует принять равной среднему значению отношений x_{nm}/b_{nm} на множестве всех ненулевых элементов матрицы B (это препятствует «искусственному» увеличению модуля вектора δ). Таким образом, с позиций общей теории оценивания параметров в математической статистике логика использования вектора δ (вместо d) в качестве базы для измерения степени структурного сходства целевой и исходной матриц соответствует ситуации несмещенного оценивания с минимальной дисперсией.

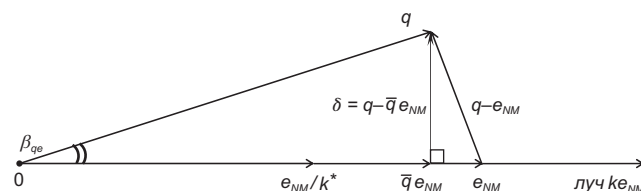


Рис. 3. Проекция вектора q на гомотетический луч в относительных координатах

Заметим, что здесь угол β_{qe} между вектором q и гомотетическим лучом ke_{NM} , вообще говоря, не равен углу α_{xb} между вектором x и лучом kb на рис. 2, поскольку умножение на диагональную матрицу $\hat{b}$ со всей очевидностью не является конформным отображением. Поэтому в дополнение к (24) возникает еще одна угловая мера структурного сходства матриц:

$$\begin{aligned} \beta_{qe} &= \arccos \left[\frac{(q, e_{NM})}{|q| \cdot |e_{NM}|} \right] = \\ &= \arccos \left[\frac{e'_{NM}q}{(q'q)^{1/2} \cdot (e'_{NM}e_{NM})^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

определенная в системе относительных координат NM -мерного евклидова пространства. По сравнению с (24) она носит более универсальный характер, так как не зависит от элементов исходной матрицы и поэтому может использоваться для сопоставления решений задач актуализации различных матриц при различных окаймляющих итогах.

Из геометрических построений на рис. 3 следует, что аналитическая связь вектора (27) с угловой мерой (28) определяется формулами:

$$\begin{aligned}\cos^2 \beta_{qe} &= \frac{(\bar{q}e'_{NM})' \bar{q}e_{NM}}{q'q} = \frac{q'e_{NM}e'_{NM}q}{e'_{NM}e_{NM} \cdot q'q}; \\ \sin^2 \beta_{qe} &= \frac{\delta'\delta}{q'q} = \frac{\delta'\delta}{\bar{q}^2 e'_{NM}e_{NM} + \delta'\delta}.\end{aligned}\quad (29)$$

Из соображений, аналогичных тем, которые использовались при анализе формул (26), можно заключить, что относительный измеритель (27) согласован с угловой мерой (28) только в случаях сравнения любых пар решений q и p , обладающих свойством равенства средних величин $\bar{q} = \bar{p}$, или $e'_{NM}(q - p) = 0$. При соблюдении этого условия вектор δ можно использовать для сопоставления решений задач актуализации различных исходных матриц при различных окаймляющих итогах (в соответствии с правилом обратного ранжирования). Заметим, что условие $e'_{NM}(q - p) = 0$, разумеется, является несколько менее «жестким», чем $b'(x - y) = 0$, но тоже весьма ограничительным.

Итак, в качестве универсального измерителя степени структурного сходства целевой и исходной матриц целесообразно рассматривать величину угла между вектором безразмерных коэффициентов q и гомотетическим лучом ke_{NM} при $k \geq 0$. Главным «техническим» недостатком угловой меры является относительная сложность формул (29), которые затруднительно использовать для построения конкурирующих (в частности, с методом RAS) алгоритмов актуализации матриц. Упрощенным аналогом угловой меры может служить основанная на операции ортогонального проектирования векторов гомотетическая мера (27), которая при всех своих недостатках обладает рядом весьма интересных свойств, делающих ее вполне операциональной в различных алгоритмических конструкциях.

Оптимизационные задачи актуализации матриц. Чтобы применить полученные выше ре-

зультаты для построения алгоритмов актуализации матриц, следует сначала переписать систему уравнений (1) в векторных обозначениях. Нетрудно убедиться, что в данном контексте эквивалентом вектора e_M , суммирующего элементы строк матрицы X в первом уравнении (1), служит матрица $G = e'_M \otimes E_N$ размерности $N \times NM$, состоящая из M расположенных по горизонтали единичных матриц E_N , а эквивалентом вектора e'_N , суммирующего элементы столбцов матрицы X во втором уравнении (1), $H = E_M \otimes e'_N$ - матрица размерности $M \times NM$, получающаяся N -кратным дублированием по горизонтали каждого столбца единичной матрицы E_M . Заметим, что в каждом из NM столбцов матриц G и H содержится ровно по одному ненулевому (единичному) элементу, так что $e'_N G = e'_M H = e'_{NM}$. Умножив введенные матрицы на вектор x в форме (23), последовательно преобразуем оба уравнения системы (1) к лаконичному виду:

$$Xe_M = Gx = G\hat{b}q = U; \quad e'_N X = Hx = H\hat{b}q = V. \quad (30)$$

Следует еще раз подчеркнуть, что при наложении условия согласованности векторов U и V в форме $e'_N U = e'_M V$ независимыми являются любые $N+M-1$ из $N+M$ линейных ограничений (30).

На основе первого из соотношений (29) сформулируем следующую задачу математического программирования: максимизировать дробно-квадратичную целевую функцию

$$F(q) = \frac{q'e_{NM}e'_{NM}q}{q'q} \quad (31)$$

при линейных ограничениях (30).

Нетрудно видеть, что функция (31) с точностью до постоянного множителя совпадает с квадратом косинуса угла β_{qe} между вектором q и гомотетическим лучом ke_{NM} , $k \geq 0$. Она ограничена сверху величиной $e'_{NM}e_{NM} = NM$, поскольку в соответствии с неравенством Коши - Буняковского [8, с. 35], известным в англоязычной литературе как неравенство Коши - Шварца [7, с. 256], имеем $(e'_{NM}q)^2 \leq e'_{NM}e_{NM} \cdot q'q$. Отметим также, что симметричная идемпотентная матрица квадратичной формы в числителе (31) вырождена и в силу неравенства Сильвестра [8, с. 31] имеет ранг 1.

На основе второго из соотношений (29) и формулы (27) можно изменить направление оптимизации в задаче (31), (30) и представить ее в следующей формулировке: минимизировать дробно-квадратичную целевую функцию

$$F(q) = \frac{\delta'\delta}{q'q} = \frac{1}{q'q} q' \left(E_{NM} - \frac{e_{NM}e_{NM}'}{e_{NM}'e_{NM}} \right) q \quad (32)$$

при линейных ограничениях (30). Функция (32) совпадает с квадратом синуса угла β_{qe} между вектором q и гомотетическим лучом ke_{NM} , $k \geq 0$ и ограничена снизу нулевым значением, что соответствует случаю, когда вектор q лежит на гомотетическом луче. Как установлено выше, симметричная идемпотентная матрица квадратичной формы в числителе (32) вырождена и имеет ранг $NM - 1$.

Эквивалентные задачи условной оптимизации (31), (30) и (32), (30) весьма затруднительно решить аналитически ввиду существенной нелинейности их целевых функций. Успех в применении с этой целью численных методов оптимизации, реализованных в многочисленных известных пакетах специализированных компьютерных программ, достигим только в задачах относительно невысокой размерности ($NM \sim 10^3$). Однако в статистической практике составления национальных счетов, таблиц ресурсов и использования товаров и услуг, таблиц «затраты - выпуск» нередко встречаются требующие актуализации массивы макроэкономических данных с общим числом элементов, превышающем 10^4 и даже достигающем 10^5 .

В связи с этим предпримем попытку разработки метода актуализации матриц на основе ограниченно согласованной с угловой мерой, но более простой в аналитическом смысле гомотетической меры (27), и сформулируем следующую задачу математического программирования: минимизировать квадратичную целевую функцию

$$f(q) = \delta'\delta = q' \left(E_{NM} - \frac{e_{NM}e_{NM}'}{e_{NM}'e_{NM}} \right) q = (q - \bar{q}e_{NM})'(q - \bar{q}e_{NM}) \quad (33)$$

при линейных ограничениях (30). Функция (33) выражает квадрат кратчайшего пути из неизвестной точки q до гомотетического луча ke_{NM} , $k \geq 0$, а с математико-статистической точки зрения пропорциональна выборочной дисперсии рассеяния элементов матрицы Q вокруг их среднего значения. Она ограничена снизу 0, что соответствует случаю, когда вектор q лежит на гомотетическом луче.

Вырожденность матрицы квадратичной формы в (33) является техническим препятствием для аналитического решения задачи условной

минимизации (33), (30), которое, впрочем, можно обойти с помощью предлагаемого ниже специального приема.

Задача условной минимизации гомотетической меры. Введем в рассмотрение взвешенную сумму квадратов отклонений элементов вектора q от соответствующих компонент некоторого экзогенного вектора γ в виде параметрического семейства функций:

$$f(q; \gamma) = (q - \gamma)'W(q - \gamma), \quad (34)$$

где $W = \hat{w}$ - невырожденная диагональная матрица порядка NM с вектором w на главной диагонали, характеризующая априорную относительную надежность оценок компонент вектора q . В терминах обобщенного метода наименьших квадратов γ можно интерпретировать как вектор математических ожиданий компонент случайного вектора q , а матрицу W - как обратную к ковариационной матрице вектора q при отсутствии автокорреляции его компонент.

Связь квадратичных функций (34) и (33) легко проследить, положив в (34) $\gamma = ce_{NM}$, где c - неизвестная скалярная константа, и сравнив полученное выражение с правой частью (33). Главное отличие (34) от (33) состоит в невырожденности матрицы квадратичной формы в (34), что позволяет претендовать на получение аналитического решения $q(\gamma)$ задачи условной минимизации квадратичной целевой функции (34) с произвольным векторным параметром γ при линейных ограничениях (30) в виде $q(\gamma) = \gamma + \tilde{q} + \tilde{Q}\gamma$, где $\tilde{q}$ и $\tilde{Q}$ - некоторые вычислимые вектор размерности $NM \times 1$ и матрица порядка NM . Если такое решение получено, то константу c можно определить из естественного в данном случае условия ортогональности векторов γ и $q(\gamma) - \gamma$, порождающего неполное квадратное уравнение $\gamma'W(\tilde{q} + \tilde{Q}\gamma) = ce_{NM}'W\tilde{q} + c^2e_{NM}'W\tilde{Q}e_{NM} = 0$, которое имеет единственный ненулевой корень.

Здесь уместно указать на некоторое внешнее сходство функции (34) с квадратичной формой $(x - a)'W(x - a) = (\hat{a}q - a)'W(\hat{a}q - a)$, которая используется в известном алгоритме актуализации матриц [10], а также подчеркнуть два существенных различия между ними: оптимизация в [10] проводится, во-первых, в системе исходных координат на основе метрического измерителя $x - a$ и, во-вторых, без применения операции ортогонального проек-

тирования векторов. Как следствие, образом скорректированной квадратичной формы $(x - b)'W(x - b) = (\hat{b}q - b)'W(\hat{b}q - b)$ в системе относительных координат (см. рис. 3) является $(q - e_{NM})'W(q - e_{NM})$, а не функция (34).

Запишем функцию Лагранжа для задачи минимизации квадратичной формы (34), параметрически зависящей от вектора γ и матрицы W , при ограничениях (30):

$$L_f(q; \gamma, \lambda, \mu) = (q - \gamma)'W(q - \gamma) - \lambda'(G\hat{b}q - U) - \mu'(H\hat{b}q - V), \quad (35)$$

где λ и μ - векторные множители Лагранжа размерности $N \times 1$ и $M \times 1$ соответственно, ассоциированные с равенствами (30). Вычислив частные производные функции (35) по аргументам q, λ, μ и приравняв их нулю, получим следующую систему $N \times M + N + M$ линейных уравнений:

$$2W(q - \gamma) - \hat{b}G'\lambda - \hat{b}H'\mu = 0; \\ G\hat{b}q - U = 0; \quad H\hat{b}q - V = 0.$$

Так как в силу сделанного выше предположения W - невырожденная диагональная матрица, первое уравнение системы разрешимо относительно переменной q :

$$q = \gamma + \frac{1}{2}W^{-1}\hat{b}(G'\lambda + H'\mu). \quad (36)$$

Последовательно подставив полученное выражение во второе и третье уравнения системы, имеем $N + M$ уравнений относительно неизвестных множителей λ и μ :

$$G\hat{b}W^{-1}\hat{b}G'\lambda + G\hat{b}W^{-1}\hat{b}H'\mu = \pi_{11}\lambda + \pi_{12}\mu = 2(U - G\hat{b}\gamma); \quad (37)$$

$$H\hat{b}W^{-1}\hat{b}G'\lambda + H\hat{b}W^{-1}\hat{b}H'\mu = \pi_{21}\lambda + \pi_{22}\mu = 2(V - H\hat{b}\gamma). \quad (38)$$

Если $W = \hat{w}$ - невырожденная диагональная матрица, то можно показать, что:

$$\pi_{12} - \text{матрица с элементами} \\ (\pi_{12})_{nm} = b_{nm}^2 / w_{n+N(m-1)}, \quad n = 1 \div N, \quad m = 1 \div M;$$

$$\pi_{11} - \text{диагональная матрица с элементами} \\ (\pi_{11})_{nn} = \sum_{j=1}^M b_{nj}^2 / w_{n+N(j-1)}, \quad n = 1 \div N;$$

$$\pi_{21} - \text{матрица с элементами } (\pi_{21})_{mn} = (\pi_{12})_{nm} = \\ = b_{nm}^2 / w_{n+N(m-1)}, \quad m = 1 \div M, \quad n = 1 \div N;$$

π_{22} - диагональная матрица с элементами

$$(\pi_{22})_{mm} = \sum_{j=1}^N b_{jm}^2 / w_{j+N(m-1)}, \quad m = 1 \div M.$$

Поскольку независимыми являются любые $N + M - 1$ из $N + M$ линейных ограничений (30), симметричная матрица π порядка $N + M$, образованная блоками $\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{21}$ и π_{22} , имеет неполный ранг $N + M - 1$, а система (37), (38) - не единственное решение. Как нетрудно видеть, $\pi_{11} = \langle \pi_{12} e_M \rangle$, $\pi_{22} = \langle \pi_{21} e_N \rangle = \langle \pi'_{12} e_N \rangle$ и, следовательно, $\pi_{11} e_N = \pi_{12} e_M$, $\pi_{21} e_N = \pi_{22} e_M$, то есть столбцы матрицы π линейно зависимы. Перенеся все члены полученных соотношений в их левые части, получим $\pi_{11} e_N - \pi_{12} e_M = 0$ и $\pi_{21} e_N - \pi_{22} e_M = 0$, откуда общее решение приведенной однородной системы для (37), (38) равно $\lambda^{(0)} = -k e_N$, $\mu^{(0)} = -k e_M$, где k - произвольная скалярная константа.

Так как общее решение неоднородной системы уравнений равно сумме общего решения приведенной однородной системы и любого частного решения неоднородной системы [8, с. 44], положим $\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}$ и $\mu = \mu^{(0)} + \mu^{(1)}$, где $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}$ - некоторое частное решение неоднородной системы (37), (38). Подставив эти разложения в выражение в круглых скобках в правой части (36), с учетом $e'_N G = e'_M H = e'_{NM}$ имеем:

$$G'\lambda + H'\mu = G'(k e_N + \lambda^{(1)}) + H'(-k e_M + \mu^{(1)}) = \\ = k e_{NM} - k e_{NM} + G'\lambda^{(1)} + H'\mu^{(1)} = G'\lambda^{(1)} + H'\mu^{(1)}.$$

Следовательно, для решения задачи минимизации целевой функции (34) при ограничениях (30) достаточно найти любое частное решение системы (37), (38). Это можно сделать как с помощью численных методов, так и в аналитической форме.

Численное решение системы (37), (38). Квадратные (диагональные) блоки π_{11} и π_{22} вырожденной матрицы системы (37), (38) при отсутствии в матрице B (и A) нулевых строк и столбцов тем не менее являются невырожденными. Это обстоятельство позволяет формально разрешить (37) относительно λ и (38) относительно μ :

$$\lambda = 2\pi_{11}^{-1}(U - G\hat{b}\gamma) - \pi_{11}^{-1}\pi_{12}\mu; \quad (39)$$

$$\mu = 2\pi_{22}^{-1}(V - H\hat{b}\gamma) - \pi_{22}^{-1}\pi_{21}\lambda, \quad (40)$$

откуда после подстановки (40) в (39) и (39) в (40) соответственно имеем:

$$\lambda = 2\pi_{11}^{-1}(U - G\hat{b}\gamma) - 2\pi_{11}^{-1}\pi_{12}\pi_{22}^{-1}(V - H\hat{b}\gamma) + \pi_{11}^{-1}\pi_{12}\pi_{22}^{-1}\pi_{21}\lambda = c_N(\gamma) + \Pi_N\lambda; \quad (41)$$

$$\mu = -2\pi_{22}^{-1}\pi_{21}\pi_{11}^{-1}(U - G\hat{b}\gamma) + 2\pi_{22}^{-1}(V - H\hat{b}\gamma) + \pi_{22}^{-1}\pi_{21}\pi_{11}^{-1}\pi_{12}\mu = c_M(\gamma) + \Pi_M\mu. \quad (42)$$

Здесь матрицы $E_N - \Pi_N$ и $E_M - \Pi_M$, разумеется, вырождены. В самом деле,

$$\Pi_N e_N = \pi_{11}^{-1}\pi_{12}\pi_{22}^{-1}\pi_{21}e_N = \pi_{11}^{-1}\pi_{12}\pi_{22}^{-1}\pi_{22}e_M = \pi_{11}^{-1}\pi_{12}e_M = \pi_{11}^{-1}\pi_{11}e_N = e_N, \quad (E_N - \Pi_N)e_N = e_N - e_N = 0;$$

$$\Pi_M e_M = \pi_{22}^{-1}\pi_{21}\pi_{11}^{-1}\pi_{12}e_M = \pi_{22}^{-1}\pi_{21}\pi_{11}^{-1}\pi_{11}e_N = \pi_{22}^{-1}\pi_{21}e_N = \pi_{22}^{-1}\pi_{22}e_M = e_M, \quad (E_M - \Pi_M)e_M = e_M - e_M = 0,$$

откуда следует, что Π_N и Π_M - стохастические матрицы, а столбцы и матрицы $E_N - \Pi_N$, и матрицы $E_M - \Pi_M$ линейно зависимы.

Тем не менее уравнения (41) и (42) могут оказаться полезными для численного нахождения частного решения неоднородной системы (37), (38), так как они представлены в форме, удобной для применения метода последовательных приближений. В связи с этим имеется возможность реализовать итерационные процессы по формулам:

$$\lambda_{(i)} = c_N(\gamma) + \Pi_N \lambda_{(i-1)}, \quad i = 1 \div I, \quad \lambda_{(0)} = c_N(\gamma);$$

$$\mu_{(j)} = c_M(\gamma) + \Pi_M \mu_{(j-1)}, \quad j = 1 \div J, \quad \mu_{(0)} = c_M(\gamma),$$

где i и j - номера итераций.

На основе последовательных подстановок при устремлении I и J к ∞ получим:

$$\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_N^i \cdot c_N(\gamma), \quad \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_M^j \cdot c_M(\gamma). \quad (43)$$

Поскольку $\Pi_N^i e_N = e_N$ и $\Pi_M^j e_M = e_M$, частичные суммы матричных рядов в (43) характеризуются неограниченным возрастанием окаймляющих итогов по строкам, и вопрос о сходимости рассматриваемых итерационных процессов требует специального изучения. Из теории однородных марковских цепей известно, что стохастические матрицы обладают следующим свойством:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Pi_N^i = \lim_{i \rightarrow \infty} (\pi_{11}^{-1}\pi_{12}\pi_{22}^{-1}\pi_{21})^i = e_N v'_N = \Pi_N^{\infty};$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Pi_M^j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\pi_{22}^{-1}\pi_{21}\pi_{11}^{-1}\pi_{12})^j = e_M v'_M = \Pi_M^{\infty},$$

где $v'_N = v'_N \Pi_N$ и $v'_M = v'_M \Pi_M$ - левые собственные векторы матриц Π_N и Π_M , соответствующие единичным

собственным значениям (все доказательства для транспонированного случая правого собственного вектора можно найти, например, в [11, с. 296-298]). Пользуясь этим результатом, докажем, что $\Pi_N^{\infty} c_N(\gamma)$ и $\Pi_M^{\infty} c_M(\gamma)$ равны нулевым векторам соответствующей размерности.

Положив $y'_N = v'_N \pi_{11}^{-1}$ и подставив это соотношение в $v'_N = v'_N \Pi_N$, получим однородное уравнение $(\pi_{12}\pi_{22}^{-1}\pi_{21} - \pi_{11}) y_N = 0$. Так как $\Pi_N e_N = e_N$, его решением является вектор-столбец $y_N = k e_N$, где k - произвольная постоянная. В самом деле, при $v'_N \pi_{11}^{-1} = y'_N = k e'_N$ имеем $v'_N \Pi_N = k e'_N \pi_{12} \pi_{22}^{-1} \pi_{21} = k e'_M \pi_{22} \pi_{22}^{-1} \pi_{21} = k e'_M \pi_{21} = (k e'_N) \pi_{11} = v'_N$.

Перегруппировав слагаемые в правой части (41), имеем:

$$\Pi_N^{\infty} c_N(\gamma) = 2k e'_N e'_N (U - \pi_{12} \pi_{22}^{-1} V) + 2k e'_N e'_N (\pi_{12} \pi_{22}^{-1} H - G) \hat{b} \gamma.$$

Поскольку $e'_N \pi_{12} = e'_M \pi_{22}$, то $e'_N (U - \pi_{12} \pi_{22}^{-1} V) = e'_N U - e'_M V = 0$ и $e'_N (\pi_{12} \pi_{22}^{-1} H - G) \hat{b} \gamma = (e'_M H - e'_N G) \hat{b} \gamma = (e'_{NM} - e'_{NM}) = 0$. Следовательно, вектор $\Pi_N^{\infty} c_N(\gamma)$ равен сумме двух нулевых слагаемых. Утверждение $\Pi_M^{\infty} c_M(\gamma) = 0$ доказывается аналогично.

Таким образом, сходимость рассматриваемых итерационных процессов обеспечивается попарной ортогональностью векторов $C_N(\gamma)$ и $C_M(\gamma)$ левым собственным векторам матриц Π_N и Π_M . Модули старших векторных слагаемых в (41) с ростом числа выполненных итераций быстро становятся пренебрежимо малыми, и поэтому в практических расчетах следует ограничиваться вычислением конечных сумм в (41) в соответствии с заранее заданными терминальными критериями типа $|\Pi_N^j c_N(\gamma)| \leq \varepsilon$ и $|\Pi_M^j c_M(\gamma)| \leq \varepsilon$, где ε - малое положительное число.

Итак, численное решение системы (37), (38) сводится к реализации одного из итерационных процессов по формулам (43) с целью нахождения вектора λ или μ и последующего расчета μ или λ по формуле (40) или (39) соответственно (эти решения, вообще говоря, различаются между собой). Вычислительная сложность предлагаемого алгоритма невысока, так как в нем, наряду с матричными операциями сложения и умножения, используется только обращение диагональных матриц порядка N и M .

Аналитическое решение системы (37), (38).

Выше неоднократно отмечалось, что в условиях

согласованности векторов U и V любые $N+M-1$ из $N+M$ линейных ограничений (30) являются независимыми. Следовательно, в целях обеспечения точной идентифицируемости переменных одно из них можно удалить (здесь необходимо подчеркнуть, что все полученные ниже результаты инвариантны относительно порядка выбора удаляемого ограничения). В связи с этим введем в рассмотрение матрицы $\underline{G}$, $\underline{H}$ и векторы $\underline{U}$, $\underline{V}$, которые отличаются от G , H и U , V выкалыванием одной из строк либо в расширенной N -строчной матрице $(G|U)$, либо в расширенной M -строчной матрице $(H|V)$. Запишем редуцированную систему линейных уравнений (30) в новых обозначениях:

$$\underline{G}\hat{b}q = \underline{U}, \quad \underline{H}\hat{b}q = \underline{V}. \quad (44)$$

Вычислив частные производные функции Лагранжа для задачи минимизации квадратичной формы (34) при $N+M-1$ ограничениях (44):

$$L_f(q; \gamma, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) = (q - \gamma)'W(q - \gamma) - \underline{\lambda}'(\underline{G}\hat{b}q - \underline{U}) - \underline{\mu}'(\underline{H}\hat{b}q - \underline{V}),$$

где $\underline{\lambda}$ и $\underline{\mu}$ - векторы множителей Лагранжа размерности $N \times 1$ или $(N-1) \times 1$ и $M \times 1$ или $(M-1) \times 1$ соответственно, по аргументам q , $\underline{\lambda}$, $\underline{\mu}$, и приравняв их нулю, получим систему

$$\begin{bmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{\mu} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1} & -(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1}P_{12}P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1}P_{21}(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1} & P_{22}^{-1} + P_{22}^{-1}P_{21}(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1}P_{12}P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} - \underline{G}\hat{b}\gamma \\ \underline{V} - \underline{H}\hat{b}\gamma \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{\mu} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} + P_{11}^{-1}P_{12}(P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12})^{-1}P_{21}P_{11}^{-1} & -P_{11}^{-1}P_{12}(P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12})^{-1} \\ -(P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12})^{-1}P_{21}P_{11}^{-1} & (P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} - \underline{G}\hat{b}\gamma \\ \underline{V} - \underline{H}\hat{b}\gamma \end{bmatrix}.$$

Первый вариант связан с обращением недиагональной симметричной матрицы $P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21}$ порядка N или $N-1$, а второй - недиагональной симметричной матрицы $P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}$ порядка M или $M-1$. Поэтому в практических расчетах при $N < M$ следует выкалывать одну из строк в расширенной N -строчной матрице $(G|U)$ и выбирать первый вариант обращения блочной матрицы, а при $N > M$ - одну из строк в расширенной M -строчной матрице $(H|V)$ с выбором второго варианта.

$N \cdot M + N + M - 1$ линейных уравнений, для которой соотношения (36) - (38) приобретают следующий вид:

$$q = \gamma + \frac{1}{2}W^{-1}\hat{b}(G'\underline{\lambda} + H'\underline{\mu}); \quad (45)$$

$$\underline{G}\hat{b}W^{-1}\hat{b}G'\underline{\lambda} + \underline{G}\hat{b}W^{-1}\hat{b}H'\underline{\mu} = P_{11}\underline{\lambda} + P_{12}\underline{\mu} = 2(\underline{U} - \underline{G}\hat{b}\gamma); \quad (46)$$

$$\underline{H}\hat{b}W^{-1}\hat{b}G'\underline{\lambda} + \underline{H}\hat{b}W^{-1}\hat{b}H'\underline{\mu} = P_{21}\underline{\lambda} + P_{22}\underline{\mu} = 2(\underline{V} - \underline{H}\hat{b}\gamma). \quad (47)$$

Матрица P системы $N+M-1$ линейных уравнений (46), (47) образована следующими блоками:

диагональная матрица $P_{11} = \underline{G}\hat{b}W^{-1}\hat{b}G'$ порядка N или $N-1$;

прямоугольная матрица $P_{12} = \underline{G}\hat{b}W^{-1}\hat{b}H'$ размерности $N \times (M-1)$ или $(N-1) \times M$;

прямоугольная матрица $P_{21} = P_{12}' = \underline{H}\hat{b}W^{-1}\hat{b}G'$ размерности $(M-1) \times N$ или $M \times (N-1)$;

диагональная матрица $P_{22} = \underline{H}\hat{b}W^{-1}\hat{b}H'$ порядка M или $M-1$.

Решение системы (46), (47) можно записать в аналитическом виде с помощью известных формул для обращения блочной матрицы (см., например, [2, Appendix A]) на двухвариантной основе:

Таким образом, векторные множители Лагранжа выражаются через векторы правых частей уравнений (46) и (47) в форме их линейных функций:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} &= 2D_{11}(\underline{U} - \underline{G}\hat{b}\gamma) + 2D_{12}(\underline{V} - \underline{H}\hat{b}\gamma); \\ \underline{\mu} &= 2D_{21}(\underline{U} - \underline{G}\hat{b}\gamma) + 2D_{22}(\underline{V} - \underline{H}\hat{b}\gamma), \end{aligned} \quad (48)$$

где D_{11} , D_{12} , D_{21} и D_{22} - блоки обратной матрицы $D = P^{-1}$ (заметим, что $D_{12} = D_{21}'$).

Аналитическое решение задачи минимизации гомотетической меры. Преобразуем далее выражение в скобках в правой части (45) на основе полученных формул для $\underline{\lambda}$ и $\underline{\mu}$:

$$\underline{G}'\underline{\lambda} + \underline{H}'\underline{\mu} = 2(\underline{G}'\underline{D}_{11} + \underline{H}'\underline{D}_{21})(\underline{U} - \underline{G}\hat{b}\gamma) + 2(\underline{G}'\underline{D}_{12} + \underline{H}'\underline{D}_{22})(\underline{V} - \underline{H}\hat{b}\gamma).$$

Подставив последнее соотношение в (45), получим аналитическое решение задачи условной минимизации квадратичной формы (34) с векторным параметром γ при наличии линейных ограничений (44):

$$q = \gamma + W^{-1}\hat{b}[(\underline{G}'\underline{D}_{11} + \underline{H}'\underline{D}_{21})(\underline{U} - \underline{G}\hat{b}\gamma) + (\underline{G}'\underline{D}_{12} + \underline{H}'\underline{D}_{22})(\underline{V} - \underline{H}\hat{b}\gamma)]. \quad (49)$$

Выше отмечалось, что для определения априори неизвестного вектора γ можно использовать условие его ортогональности вектору $q - \gamma$. Перепишем (49) в более компактной форме $q - \gamma = W^{-1}\hat{b}(z - Y\hat{b}\gamma)$, где, как нетрудно убедиться, z - вектор размерности $NM \times 1$ и Y - квадратная симметричная матрица порядка NM . Заметим, что z и Y не зависят от γ , а Y не зависит от $\underline{U}$ и $\underline{V}$. Условие ортогональности $\gamma'W(q - \gamma) = \gamma'\hat{b}Y\hat{b}\gamma = 0$ и однопараметрическая спецификация вектора $\gamma = ce_{NM}$ порождают неполное квадратное уравнение, единственный ненулевой корень которого равен $c^* = bz'/b'Yb$.

Подставив $\gamma^* = e_{NM} \cdot b'z/b'Yb$ в правую часть аналитического решения (49), имеем:

$$q = W^{-1}\hat{b}z + (E_{NM} - W^{-1}\hat{b}Y\hat{b})\gamma = W^{-1}\hat{b}z + \frac{b'z}{b'Yb}e_{NM} - \frac{b'z}{b'Yb}W^{-1}\hat{b}Yb.$$

Полученный результат выглядит весьма обнадеживающим с вычислительной точки зрения, поскольку в нем зависимость q от «гигантской» квадратной матрицы Y порядка NM представлена в форме зависимости от вектора $y = Yb$ размерности $NM \times 1$ с существенно меньшим количеством элементов.

Итак, искомое аналитическое решение задачи условной минимизации целевой функции (34) при линейных ограничениях (44) имеет следующий вид:

$$q^* = W^{-1}\hat{b}z + \frac{b'z}{b'y}(e_{NM} - W^{-1}\hat{b}y), \quad (50)$$

где векторы-столбцы z и y размерности $NM \times 1$ определяются по формулам:

$$z = (\underline{G}'\underline{D}_{11} + \underline{H}'\underline{D}_{21})\underline{U} + (\underline{G}'\underline{D}_{12} + \underline{H}'\underline{D}_{22})\underline{V}; \\ y = (\underline{G}'\underline{D}_{11} + \underline{H}'\underline{D}_{21})\underline{G}b + (\underline{G}'\underline{D}_{12} + \underline{H}'\underline{D}_{22})\underline{H}b. \quad (51)$$

Вычислительная сложность расчетов по приведенной выше схеме относительно невысока: требуется обратить одну из симметричных матриц $P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21}$ или $P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}$ порядка $\min\{N, M\} - 1$ и рассчитать NM компонент для каждого из трех векторов z , y и q^* в условиях высокой разреженности матриц $\underline{G}$, $\underline{H}$ и диагональности матриц W и $\hat{b}$.

Множители Лагранжа и анализ чувствительности решения. Множители Лагранжа в точке условного минимума взвешенной целевой функции (34) при ограничениях (44) определяются путем подстановки вектора $\gamma^* = e_{NM} \cdot b'z/b'Yb$ в правые части формул (48):

$$\underline{\lambda} = 2(\underline{D}_{11}\underline{U} + \underline{D}_{12}\underline{V}) - 2(\underline{D}_{11}\underline{G} + \underline{D}_{12}\underline{H})\frac{bb'z}{b'y}; \\ \underline{\mu} = 2(\underline{D}_{21}\underline{U} + \underline{D}_{22}\underline{V}) - 2(\underline{D}_{21}\underline{G} + \underline{D}_{22}\underline{H})\frac{bb'z}{b'y}. \quad (52)$$

Так как в силу первого равенства (51) z представляет собой линейную функцию аргументов $\underline{U}$ и $\underline{V}$, а в соответствии со вторым равенством (51) вектор y от $\underline{U}$ и $\underline{V}$ и не зависит, правые части формул (52) линейны по $\underline{U}$ и $\underline{V}$.

Нетрудно видеть, что аналитическое решение (50), (51) может быть получено $N+M$ эквивалентными способами в зависимости от того, какое из $N+M$ линейных ограничений (30) рассматривается при построении системы уравнений (46), (47) как избыточное. В каждом из этих случаев размерность объединенного вектора-столбца множителей Лагранжа ρ составляет $(N+M-1) \times 1$, тогда как в функции (35) и системе уравнений (37), (38) фигурирует объединенный векторный множитель ρ на единицу большей размерности $NM \times 1$. Связь между ρ и $\underline{\rho}$ устанавливается соотношением:

$$\rho = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \bar{E}_{N+M-1}^{(j)} \begin{bmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{\mu} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} e_N \\ -e_M \end{bmatrix} = \\ = \bar{E}_{N+M-1}^{(j)} \underline{\rho} + k \begin{bmatrix} e_N \\ -e_M \end{bmatrix}, \quad (53)$$

где j - порядковый номер ограничения, удаленного из системы (30) при переходе от G, H, U, V к $\underline{G}, \underline{H}, \underline{U}, \underline{V}$, $j = 1 \div (N+M)$; $\bar{E}_{N+M-1}^{(j)}$ - матрица размерности $(N+M) \times (N+M-1)$, полученная из единичной матрицы

порядка $N+M-1$ путем добавления к ней нулевой строки на j -ю позицию.

Соотношение (53) построено на основе полученного выше общего решения приведенной однородной системы (37), (38) и отражает тот очевидный факт, что удаленному ограничению соответствует нулевой множитель Лагранжа. Равенство в (53) для каждой пары ρ и $\underline{\rho}$ обеспечивается надлежащим выбором постоянной k .

Из теории математического программирования известно, что множители Лагранжа в оптимальном решении экстремальной задачи с ограничениями в виде равенств представляют собой компоненты градиента оптимума целевой функции в пространстве векторов правых частей ограничений (см., например, [7, с. 191, 192]). Однако в данном случае множители Лагранжа $\lambda = \lambda^{(1)} + ke_N$ и $\mu = \mu^{(1)} - ke_M$ не идентифицируются однозначно вследствие того, что векторы U и V связаны согласующим условием $e'_N U = e'_M V$, и поэтому вопрос об их использовании для анализа чувствительности условного минимума целевой функции (34) к изменениям компонент U и V требует дополнительных пояснений.

Любое возмущение компонент вектора U через «механизм» согласующего условия порождает адекватное изменение в элементах V , и наоборот. В частности, приращение одного из элементов U на некоторую величину влечет за собой необходимость внесения в одну или несколько компонент V аддитивных поправок, алгебраическая сумма которых совпадает с величиной этого приращения. Ясно, что некоторые возмущения приводят к увеличению условного минимума взвешенной целевой функции (34), тогда как другие, напротив, способствуют его уменьшению.

Как установлено выше, линейная векторнозначная функция $G'\lambda + H'\mu$ инвариантна относительно изменения параметра k в формулах для λ и μ . Другим подобным инвариантом является матрица $L = \lambda e'_M + e'_N \mu' = \lambda e'_M + e'_N \mu' + ke_N e'_M - ke_N e'_M = (\lambda + ke_N) e'_M + e'_N (\mu' - ke'_M)$ размерности $N \times M$, образованная элементами $l_{nm} = \lambda_n + \mu_m$, $n = 1 \div N$, $m = 1 \div M$. Нетрудно показать, что каждый элемент l_{nm} играет роль коэффициента чувствительности условного минимума целевой функции (34) к одновременному увеличению компонент U_n и V_m на одну и ту же малую положительную величину ε : если возмущенные значения U_n и V_m равны $U_n + \varepsilon$ и $V_m + \varepsilon$, то условный минимум $f(q^*; \gamma^*)$ приобретает

приращение $f^*(U, V | U_n + \varepsilon, V_m + \varepsilon) - f^*(U, V) = \varepsilon l_{nm}$. Следовательно, для уменьшения значения $f(q^*; \gamma^*)$ величину возмущения ε необходимо выбирать со знаком, обратным знаку элемента l_{nm} .

Особый интерес в рассматриваемом контексте представляют наибольшие по абсолютной величине элементы матрицы L , поскольку они соответствуют тем компонентам векторов U и V , возмущение которых оказывает максимальное влияние на решение задачи условной минимизации целевой функции (34) при ограничениях (30). Если $|l_{nm}| \geq |l_{ij}|$ для всех $i = 1 \div N$, $j = 1 \div M$, то эффективная стратегия локального улучшения условного минимума $f^*(U, V)$ состоит в приращении компонент U_n и V_m на одну и ту же малую величину $-\varepsilon \cdot \text{sgn}(l_{nm})$, где $\varepsilon > 0$ и $\text{sgn}(\cdot)$ - сигнум-функция своего аргумента. Далее, если определить максимальный (положительный) и минимальный (отрицательный) элементы $1_+ > 0$ и $1_- < 0$ матрицы L , то одновременное приращение соответствующих компонент векторов U и V на малые величины $-\varepsilon$ и ε характеризует эффективную двухкомпонентную стратегию улучшения оптимума функции (34) при условии неизменности суммы всех элементов целевой матрицы $\Sigma = e'_N U = e'_M V$.

Нетрудно видеть, что в общем случае совокупный эффект от внесения возмущений равен:

$$\Delta_f(\Delta_U, \Delta_V) = f^*(U + \Delta_U, V + \Delta_V) - f^*(U, V) = \Delta'_U \lambda + \mu' \Delta_V, \quad (54)$$

где Δ_U и Δ_V - векторы экзогенных возмущений размерности $N \times 1$ и $M \times 1$ соответственно, которые удовлетворяют согласующему условию $e'_M \Delta_U = e'_N \Delta_V = \Sigma_{\Delta X}$.

Последовательно рассмотрим две важных в практическом отношении ситуации $\Sigma_{\Delta X} = 0$ (Σ -сохраняющие возмущения) и $\Sigma_{\Delta X} \neq 0$ (Σ -изменяющие возмущения), которые к тому же позволяют, как показано ниже, выразить эффект (54) через инвариантную матрицу L .

Внесение малых аддитивных возмущений Δ_U и Δ_V с нулевой суммой ($e'_N \Delta_U = e'_M \Delta_V = 0$) в векторы U и V является полезным вспомогательным инструментом решения задач актуализации макроэкономических данных в статистической практике. Такие возмущения обеспечивают частичное перераспределение компонент U и V при постоянной величине Σ . Легко убедиться, что совокупный перераспределительный эффект зависит от окаймляющих итогов матрицы L и оценивается линейной функцией возмущений:

$$\Delta_U(\Delta_U, \Delta_V | \Sigma_{\Delta X} = 0) = \Delta'_U (\lambda + \bar{\mu} e_N) + (\mu + \bar{\lambda} e_M)' \Delta_V = \frac{1}{M} \Delta'_U L e_M + \frac{1}{N} e'_N L \Delta_V, \quad (55)$$

где $\bar{\mu} = e'_M \mu / M$ и $\bar{\lambda} = e'_N \lambda / N$. Первое слагаемое в правой части (55) подразумевает, что каждая компонента вектора Δ_U равномерно распределяется по M компонентам вектора Δ_V и порождает M элементарных эффектов, сумма которых пропорциональна средней величине элементов соответствующей строки матрицы L . Аналогично, второе слагаемое в правой части (55) означает, что каждая компонента вектора Δ_V равномерно распределяется по N компонентам вектора Δ_U и порождает N элементарных эффектов, сумма которых пропорциональна средней величине элементов соответствующего столбца матрицы L .

В более общем случае $\Sigma_{\Delta X} \neq 0$ преобразуем числовую функцию возмущений:

$$\Delta'_U L \Delta_V = \Delta'_U (\lambda e'_M + e_N \mu') \Delta_V = \Delta'_U \lambda (e'_M \Delta_V) + (\Delta'_U e_N) \mu' \Delta_V = \Sigma_{\Delta X} (\Delta'_U \lambda + \mu' \Delta_V),$$

откуда на основе сравнения с (54) следует, что

$$\Delta_f(\Delta_U, \Delta_V | \Sigma_{\Delta X} \neq 0) = \Delta'_U \lambda + \mu' \Delta_V = \frac{1}{\Sigma_{\Delta X}} \Delta'_U L \Delta_V. \quad (56)$$

Таким образом, совокупный эффект от внесения Σ -изменяющих возмущений оценивается квадратичной функцией (56), а не линейной, как в (55) при внесении Σ -сохраняющих возмущений.

Декомпозиция задач большой размерности. Задача минимизации целевой функции (34) при $N+M$ линейных ограничениях (30) содержит NM неизвестных переменных, и с увеличением N и M ее размерность быстро возрастает. При недостатке ресурсов для практической реализации расчетов по формулам (50), (51) можно отказаться от получения оптимального решения задачи в пользу субоптимального, получаемого в результате обработки совокупности подзадач того же типа, но существенно меньшей размерности.

Основная идея декомпозиции задачи (34), (30) заключается в построении семейства мультипликативных моделей типа $x_{ij} = q_{ij} b_{ij}$, $i = 1 \div N$, $j = 1 \div M$, для исходной матрицы A размерности $N \times M$, подвергнутой разбиению на прямоугольные блоки. Для удобства изложения (и без ограничения общности) предположим, что все блоки имеют одинаковую размерность $n \times t$, причем n и t являются делителями N и M соответственно.

Таким образом, общее количество блоков разбиения матрицы A составляет $(NM)/(nt)$. Предлагаемый декомпозиционный алгоритм актуализации матриц большой размерности реализуется по следующей четырехэтапной схеме.

На *первом этапе* элементы каждого блока матрицы A агрегируются в элементы матрицы $A_{00} = (E_{N/n} \otimes e'_n) A (E_{M/m} \otimes e_m)$ размерности $(N/n) \times (M/m)$, а окаймляющие итоги U и V заменяются агрегированными векторами $U_{00} = (E_{N/n} \otimes e'_n) U$ размерности $(N/n) \times 1$ и $V_{00} = (E_{M/m} \otimes e'_m) V$ размерности $(M/m) \times 1$. Далее следует вычислить матрицу $B_{00} = k^* A_{00}$ по формуле (19) и решить задачу актуализации матрицы A_{00} при окаймляющих итогах U_{00} и V_{00} по формулам (50) и (51), а затем на основе (20) построить матрицу X_{00} со свойствами $X_{00} e_{M/m} = U_{00}$ и $e'_{N/n} X_{00} = V_{00}$.

На *втором этапе* работы алгоритма формируются цепочки N/n матриц $A_{\rightarrow}^i = (\ell'_{N/n, i} \otimes E_n) A (E_{M/m} \otimes e_m)$ размерности $n \times (M/m)$ и подвекторов $U_{\rightarrow}^i = (\ell'_{N/n, i} \otimes E_n) U \subset U$ размерности $n \times 1$, где $\ell_{N/n, i}$ - вектор-столбец естественного базиса N/n -мерного пространства с единицей на i -й позиции, $i = 1 \div N/n$. Легко видеть, что столбцы каждой матрицы $A_{\rightarrow}^i$ образованы строчными суммами элементов по блокам разбиения матрицы A в i -м горизонтальном ряду этих блоков. Затем с помощью формул (19), (50) и (51) последовательно решаются задачи актуализации всех матриц $A_{\rightarrow}^i$ при окаймляющих итогах $U_{\rightarrow}^i$ и $V_{\rightarrow}^i = X'_{00} \ell_{N/n, i}$, где $X'_{00} \ell_{N/n, i}$ - i -я строка полученной на первом этапе матрицы X_{00} , и на основе (20) строятся целевые матрицы $X_{\rightarrow}^i$ размерности $n \times (M/m)$.

На *третьем этапе* формируются цепочки M/m матриц $A_{\downarrow}^j = (E_{N/n} \otimes e'_n) A (\ell_{M/m, j} \otimes E_m)$ размерности $(N/n) \times t$ и подвекторов $V_{\downarrow}^j = (\ell'_{M/m, j} \otimes E_m) V \subset V$ размерности $t \times 1$, где $\ell_{M/m, j}$ - вектор-столбец естественного базиса M/m -мерного пространства с единицей на j -й позиции, $j = 1 \div M/m$. Нетрудно видеть, что строки каждой матрицы $A_{\downarrow}^j$ образованы столбцовыми суммами элементов по блокам разбиения матрицы A в j -м вертикальном ряду этих блоков. Далее с помощью формул (19), (50), (51) и (20) строятся целевые матрицы $X_{\downarrow}^j$ размерности $(N/n) \times t$ путем последовательного решения задач актуализации всех матриц $A_{\downarrow}^j$ при окаймляющих итогах $U_{\downarrow}^j = X_{00} \ell_{M/m, j}$ и $V_{\downarrow}^j$, где $X_{00} \ell_{M/m, j}$ - j -й столбец матрицы X_{00} .

На *заключительном, четвертом этапе работы* алгоритма исходная матрица A подвергается разбиению на $(NM)/(nt)$ прямоугольных блоков

$A_{ij} = (\ell'_{N/n,i} \otimes E_n) A (\ell_{M/m,j} \otimes E_m)$ размерности $n \times m$, $i = 1 \div N/n, j = 1 \div M/m$. В качестве окаймляющих итогов для (i, j) -го блока естественно использовать вектор-столбец $X_{\downarrow}^i \ell_{M/m,j}$, то есть j -й столбец матрицы $X_{\downarrow}^i$ размерности $n \times (M/m)$, и вектор-строку $\ell'_{N/n,i} X_{\downarrow}^j$ - i -ю строку матрицы $X_{\downarrow}^j$ размерности $(N/n) \times m$. Последовательно решив $(NM)/(nm)$ задач актуализации матриц A_{ij} с помощью формул (19), (50), (51) и (20), получим блоки X_{ij} , объединение которых при $i = 1 \div N/n, j = 1 \div M/m$ обеспечивает формирование искомой целевой матрицы X размерности $N \times M$, удовлетворяющей $N+M$ условиям (30).

Таким образом, при реализации декомпозиционного алгоритма задачу условной минимизации (34), (30) необходимо решить для одной матрицы размерности $(N/n) \times (M/m)$, N/n матриц размерности $n \times (M/m)$, M/m матриц размерности $(N/n) \times m$ и $(NM)/(nm)$ прямоугольных блоков размерности $n \times m$. Чтобы все рассматриваемые матрицы имели примерно одинаковую размерность, целочисленные параметры алгоритма n и m целесообразно выбирать исходя из условий $N/n \approx n$ и $M/m \approx m$, откуда $n \approx \sqrt{N}$ и $m \approx \sqrt{M}$.

Числовые примеры и заключительные комментарии. Для составления нескольких простых примеров, наглядно иллюстрирующих возможности разработанного метода актуализации макроэкономических матриц на фоне метода RAS, воспользуемся данными малоразмерной таблицы «затраты - выпуск» из раздела «Box 14.2: RAS procedure» в Руководстве Евростата [12, p. 452]. Исходная матрица A размерности 3×4 сформирована из элементов в пересечениях столбцов «Agriculture», «Industry», «Services», «Final d.» со строками «Agriculture», «Industry», «Services» в «Table 1: Input-output data for year 0». Следует подчеркнуть, что все элементы этой матрицы не равняются нулю. Вектор окаймляющих итогов по строкам U является соответствующим подвектором столбца «Output» в «Table 2: Input-output data for year 1», а вектор-строка окаймляющих итогов по столбцам V' составлена из соответствующих элементов строки «Total» в той же таблице.

Исходная матрица A , окаймляющие итоги U и V' , а также матрица B , рассчитанная по формуле (19) с коэффициентом $k^* = 1,0290$, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные матрицы A и B с ненулевыми элементами

	A				u	U	k^*	B				u_B	U
v'	20,00	34,00	10,00	36,00	100,00	94,78	1,0290	20,58	34,99	10,29	37,05	102,90	94,78
	20,00	152,00	40,00	188,00	400,00	412,86		20,58	156,41	41,16	193,46	411,61	412,86
	10,00	72,00	20,00	98,00	200,00	212,68		10,29	74,09	20,58	100,84	205,81	212,68
v'_B	50,00	258,00	70,00	322,00	700,00			51,45	265,49	72,03	331,35	720,32	
V'	47,28	268,02	73,58	331,44		720,32		47,28	268,02	73,58	331,44		720,32

Первый числовой пример связан с применением к данным из таблицы 1 итерационного процесса (13) или (14) в качестве алгоритма метода RAS и аналитического подхода (50), (51) к решению задачи условной минимизации целевой функции (34) при линейных ограничениях (44). (Последний для краткости будем называть методом GLS - от англ. *generalized least squares*.)

Результаты выполненных расчетов, сгруппированные в таблице 1а, свидетельствуют об относительно небольших различиях между двумя полученными целевыми матрицами: наибольшее отклонение их элементов друг от друга, наблюдаемое для элементов (3, 3), составляет 3,5%.

Тем не менее метод GLS демонстрирует здесь 5%-ное преимущество перед методом RAS при

Таблица 1а

Результаты актуализации матрицы из таблицы 1 по методам RAS и GLS

RAS	X				u_x	U	GLS	X				u_x	U
v'_x	17,94	32,77	9,76	34,31	94,78	94,78	v'_x	18,35	32,41	10,03	33,99	94,78	94,78
	19,36	158,08	42,12	193,30	412,86	412,86		19,07	158,82	42,60	192,37	412,86	412,86
	9,98	77,17	21,70	103,84	212,68	212,68		9,86	76,79	20,95	105,08	212,68	212,68
V'	47,28	268,02	73,58	331,44	720,32		V'	47,28	268,02	73,58	331,44	720,32	
	47,28	268,02	73,58	331,44		720,32		47,28	268,02	73,58	331,44		720,32

использовании не только гомотетической меры (27), но и угловой меры (28):

$$|\delta^{\text{RAS}}| = 0,1847, |\delta^{\text{GLS}}| = 0,1756, |\delta^{\text{GLS}}|/|\delta^{\text{RAS}}| = 95,10\%;$$

$$\beta_{qe}^{\text{RAS}} = 3,1161^\circ, \beta_{qe}^{\text{GLS}} = 2,9677^\circ, \beta_{qe}^{\text{GLS}}/\beta_{qe}^{\text{RAS}} = 95,24\%.$$

Следующий числовой пример предназначен для сравнительной оценки реакций тестируемых методов на наличие в исходной матрице нулевых элементов. С этой целью положим один из эле-

ментов исходной матрицы из таблицы 1 - например элемент (3, 1) - равным нулю и точно также поступим с соответствующим элементом матрицы для года 1 [12, р. 452]. После пересчета третьей компоненты вектора строчных окаймляющих итогов и первой компоненты вектора столбцовых окаймляющих итогов получим набор данных, приведенных в таблице 2.

Результаты проведенных вычислений по методам RAS и GLS, объединенные в таблице 2а, вновь свидетельствуют об относительно небольших

Таблица 2

Исходные матрицы *A* и *B* с нулевым элементом (3, 1)

A						k^*	B				u_B		U	
u							U				u_B		U	
v'	20,00	34,00	10,00	36,00	100,00		94,78	v'_B	20,59	35,01	10,30	37,07	102,97	94,78
	20,00	152,00	40,00	188,00	400,00		412,86		20,59	156,52	41,19	193,59	411,90	412,86
	0,00	72,00	20,00	98,00	190,00	202,88	0,00		74,14	20,59	100,91	195,65	202,88	
	40,00	258,00	70,00	322,00	690,00		41,19		265,67	72,08	331,58	710,52		
V'	37,48	268,02	73,58	331,44		710,52	V''	37,48	268,02	73,58	331,44		710,52	

Таблица 2а

Результаты актуализации матрицы из таблицы 2 по методам RAS и GLS

RAS						k^*	GLS					
X					u_x		U	X				u_x
v'_x V'	18,02 32,74 9,75 34,27				94,78	94,78	18,36 32,40 10,04 33,98				94,78	94,78
	19,46 158,05 42,11 193,25				412,86	412,86	19,12 158,80 42,58 192,37				412,86	412,86
	0,00 77,23 21,72 103,92				202,88	202,88	0,00 76,82 20,96 105,10				202,88	202,88
	37,48 268,02 73,58 331,44				710,52		37,48 268,02 73,58 331,44				710,52	
	37,48 268,02 73,58 331,44					710,52	37,48 268,02 73,58 331,44					710,52

различиях между двумя полученными целевыми матрицами: наибольшее отклонение их элементов друг от друга, наблюдаемое опять для элементов (3, 3), составляет 3,6%. Таким образом, «способность» обоих методов обрабатывать матрицы с нулевыми элементами проявляется в рассмотренных примерах практически одинаково, что представляется вполне естественным ввиду их выраженной мультипликативной природы.

Чтобы более корректно оценить степень структурного сходства исходной матрицы и целевой матрицы, полученной по методу RAS, при наличии нулевого элемента следует применить описанный выше способ спецификации константы *c* в (21). Но даже в этом случае метод GLS устойчиво сохраняет 5%-ное преимущество перед методом RAS как по гомотетической, так и по угловой мере:

$$|\delta^{\text{RAS}}| = 0,1826, |\delta^{\text{GLS}}| = 0,1736, |\delta^{\text{GLS}}|/|\delta^{\text{RAS}}| = 95,08\%;$$

$$\beta_{qe}^{\text{RAS}} = 3,0778^\circ, \beta_{qe}^{\text{GLS}} = 2,9291^\circ, \beta_{qe}^{\text{GLS}}/\beta_{qe}^{\text{RAS}} = 95,17\%.$$

Отмеченное преимущество метода GLS здесь не является впечатляющим, так как число «свободных» переменных $NM - (N + M)$ в рассмотренных числовых примерах относительно мало (оно равно 5). Однако с повышением размерности актуализируемых матриц это преимущество быстро нарастает. При размерностях, превышающих 3×7 (7×3) и 4×5 (5×4), количество свободных переменных начинает превосходить общее число неизвестных в методе RAS, и метод GLS становится существенно более гибким. Вычислительные эксперименты с матрицами размерности 15×20 , построенными на основе кратких таблиц ресурсов и использования

для экономики Российской Федерации в 2004–2006 гг., показывают, что метод GLS почти вдвое опережает RAS по эффективности в терминах гомотетической и угловой мер (27) и (28).

Как известно, «... метод RAS пригоден только для обработки матриц с неотрицательными элементами, что ограничивает возможности его применения в таблицах ресурсов и использования, которые часто содержат отрицательные величины...» [1, р. 92]. Поэтому заключительный числовой пример отведен сравнительной оценке реакций тестируемых методов на присутствие в исходной матрице отрицательных элементов.

Изменим знаки каких-либо трех элементов исходной матрицы из таблицы 1 – например элементов (1,3), (3,1) и (3,3) – на противоположные и точно так же поступим с соответствующими элементами матрицы для года 1 [12, р. 452]. После пересчета первой и третьей компонент векторов строчных и столбцовых окаймляющих итогов получим набор данных, представленных в таблице 3.

Результаты расчетов по методам RAS и GLS, сгруппированные в таблице 3а, теперь демонстрируют значительные различия между полученными целевыми матрицами, которые проявляются главным образом в элементах x_{13} , x_{23} , x_{24} и x_{33} .

Таблица 3

Исходные матрицы A и B с тремя отрицательными элементами

A						u	U	k^*	B				u_B	U
v' V'	20,00	34,00	-10,00	36,00	80,00	74,50	1,0263	20,53	34,89	-10,26	36,95	82,10	74,50	
	20,00	152,00	40,00	188,00	400,00	412,86		20,53	155,99	41,05	192,94	410,50	412,86	
	-10,00	72,00	-20,00	98,00	140,00	148,92		-10,26	73,89	-20,53	100,57	143,68	148,92	
	30,00	258,00	10,00	322,00	620,00			30,79	264,77	10,26	330,46	636,28		
	27,68	268,02	9,14	331,44		636,28		27,68	268,02	9,14	331,44		636,28	

Таблица 3а

Результаты актуализации матрицы из таблицы 3 по методам RAS и GLS

RAS		X				u_X	U	GLS		X				u_X	U
v'_X		17,09	31,06	-6,18	32,53	74,50	74,50			18,55	32,30	-10,21	33,87	74,50	74,50
		20,13	163,54	29,12	200,07	412,86	412,86			19,27	159,99	39,34	194,26	412,86	412,86
		-9,54	73,42	-13,80	98,84	148,92	148,92			-10,13	75,73	-19,99	103,31	148,92	148,92
		27,68	268,02	9,14	331,44	636,28				27,68	268,02	9,14	331,44	636,28	
	V''	27,68	268,02	9,14	331,44		636,28		V''	27,68	268,02	9,14	331,44		636,28

Преимущество метода GLS здесь оказывается весьма значительным и вполне наглядным. Этот вывод подтверждается следующими расчетными оценками гомотетического и углового измерителей:

$$|\delta^{\text{RAS}}| = 0,4906, |\delta^{\text{GLS}}| = 0,1479, |\delta^{\text{GLS}}|/|\delta^{\text{RAS}}| = 30,14\%;$$

$$\beta_{qe}^{\text{RAS}} = 9,1437^\circ, \beta_{qe}^{\text{GLS}} = 2,5102^\circ, \beta_{qe}^{\text{GLS}}/\beta_{qe}^{\text{RAS}} = 27,45\%.$$

В заключение уместно еще раз подчеркнуть, что предложенный метод актуализации матриц макроэкономических данных на основе гомотетической парадигмы их структурного сходства,

как показывают практические расчеты, позволяет строить мультипликативные модели (20) с существенно более компактными распределениями коэффициентов по сравнению с методом RAS. Указанное преимущество заметно нарастает при увеличении размерности исходной и целевой матриц даже при использовании разработанного метода в рамках изложенного выше алгоритма декомпозиции матриц большой размерности.

Литература

1. Temurshoev U., Webb C., Yamano N. Projection of Supply and Use Tables: Methods and their Empirical Assessment // Economic Systems Research. 2011. Vol. 23. No. 1. P. 9–123.

2. **Miller R.E., Blair P.D.** Input-Output Analysis: Foundations and Extensions: 2nd Ed. - N.Y.: Cambridge University Press, 2009. - 782 p.
3. **Stone R.** Input-Output and National Accounts. - Paris: Organization for European Economic Cooperation, 1961. - 202 p.
4. **Lahr M., de Mesnard L.** Biproportional Techniques in Input-Output Analysis: Table Updating and Structural Analysis // Economic Systems Research. 2004. Vol. 16. No. 2. P. 115-134.
5. Handbook of Input - Output Table Compilation and Analysis: Studies in Methods, Handbook of National Accounting, ST/ESA/STAT/SER.F/74 / United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Statistics Division. - New York, 1999. - 265 p.
6. **Junius T., Oosterhaven J.** The Solution of Updating or Regionalizing a Matrix // Economic Systems Research. 2003. Vol. 15. No. 1. P. 87-96.
7. **Магнус Я.Р., Нейдеккер Х.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике: Пер. с англ./ Под ред. С.А. Айвазяна. - М.: Физматлит, 2002. - 496 с.
8. **Боеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. - М.: Наука. 1984. - 320 с.
9. **Wackerly D.D., Mendenhall W., Scheaffer R.L.** Mathematical Statistics with Applications / 7-th Ed. - USA: Thomson Brooks/Cole, 2008. - 912 p.
10. **Harthoorn R., van Dalen J.** On the Adjustment of Tables with Lagrange Multipliers / The Netherlands Central Bureau of Statistics, National Accounts Research Division Occasional Paper NA-024. - 1987. - 53 p.
11. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц: Пер. с англ., под ред. Б.В. Лидского. - М.: Наука, 1969. - 367 с.
12. Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables: Methodologies and working papers, Ca. No. KS-RA-07-013-EN-N / European Commission. - Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2008. - 590 p.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА СОСТОЯНИЯ И ТЕНДЕНЦИЙ РАЗВИТИЯ РОССИЙСКОГО РЫНКА МЯСА

Т.А. Дуброва, *д-р экон. наук,*

А.В. Пузаков,

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)

Рынок мяса - один из наиболее значимых сегментов продовольственного рынка современной России. Развитие рынка мяса отражает характер воспроизводственного процесса во всем агропромышленном комплексе, поскольку производство мяса и мясопродуктов обеспечивается рядом отраслей сельского хозяйства и промышленности страны. Строительство и открытие новых предприятий в рамках развития производства мяса (мясоперерабатывающие заводы, птицефабрики и пр.) позволят создать дополнительные рабочие места, что особенно актуально для регионов с высоким уровнем безработицы.

Вопрос оценки состояния и развития российского рынка мяса, безусловно, является актуальным и своевременным. Производство и переработка мяса играют важную роль в реализации государственной экономической политики в области обеспечения продовольственной безопасности Российской Федерации, направленной

на надежное снабжение населения страны качественными продуктами питания. Необходимость развития российского АПК обусловлена также обострением конкуренции между отечественными и импортными товарами, вызванным вступлением России во Всемирную торговую организацию (ВТО). Выявление основных проблем, стоящих перед российскими производителями мяса, способствует принятию обоснованных управленческих решений по их поддержке.

Большой практический интерес представляет проведение комплексного статистического анализа состояния и перспектив развития отечественного рынка мяса и мясопродуктов. При этом значимыми являются задачи выявления основных тенденций развития российского и мирового рынков мяса, проведения многомерной классификации стран, являющихся основными производителями мяса, определения позиции России в полученной кластерной структуре, а