К проблеме построения аналитических индексов рыночного спроса: вариативный подход

Владимир Константинович Горбунов^{а)},
Любовь Александровна Козлова^{а)},
Александр Геннадьевич Львов^{а), б)}

^{а)} Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия;

^{б)} ООО АК «ЭйрБриджКарго», г. Ульяновск, Россия

Статья посвящена проблеме построения экономических (аналитических) индексов, учитывающих при оценке социально-экономической динамики потребительские предпочтения, в рамках холистической теории рыночного спроса, разработанной в последние годы. На основе этой теории экономические индексы, представленные в мировой литературе в рамках теории индивидуального спроса и характеризующие спрос домашних хозяйств, приобретают практическую ценность.

Во введении содержится краткий обзор основных проблем современной индексологии и реализации экономического подхода, восходящего к классической работе, опубликованной в 1924 г. советским экономистом-математиком и статистиком А.А. Конюсом. Излагаются свойства наиболее известных «формульных» индексов Ласпейреса, Пааше и Фишера относительно выполнения тестов-критериев Фишера. Эти индексы играют важную роль в предлагаемых авторами методах построения аналитических индексов, которые определяются через функцию потребительских расходов. Последняя определяется функцией полезности, рационализирующей торговую статистику. Рационализирующая функция полезности строится неоднозначно, и соответствующая задача должна уточняться. Предлагаются методы ее решения, разработанные в рамках непараметрического анализа спроса Африата-Вэриана. Ядром этого анализа является система линейных неравенств Африата, определяющих значения функции полезности и предельной полезности на статистическом спросе. Эта система может быть несовместной и неустойчивой относительно вариаций приближенной статистики спроса. В случае совместности неравенства имеют множества решений, и выбор различных решений неравенств определяет различные значения аналитических индексов. Авторы предлагают три типа задач устойчивого решения систем неравенств Африата, которые определяют индексы с характеристиками «оптимизм» (низкие индексы цен и высокие индексы количества потребления), «пессимизм» (наоборот) и «объективность».

Таким образом, для повышения объективности индексов потребительского спроса предлагается теоретически обоснованный инструментальный - методы вычисления аналитических индексов рыночного спроса, учитывающих, в отличие от формульных индексов, потребительские предпочтения.

Ключевые слова: рыночный спрос, формульные индексы, тесты Фишера, индексы Конюса и инвариантные, неравенства Африата, оптимистические и пессимистические индексы.

JEL: C43, C61, E31, E71.

doi: <https://doi.org/10.34023/2313-6383-2020-27-3-65-80>.

Для цитирования: Горбунов В.К., Козлова Л.А., Львов А.Г. К проблеме построения аналитических индексов рыночного спроса: вариативный подход. Вопросы статистики. 2020;27(3):65-80.

To the Problem of Constructing Analytical Indexes of Market Demand: A Variative Approach

Vladimir K. Gorbunov^{a)},
Lyubov A. Kozlova^{a)},
Alexander G. Lvov^{a), b)}

^{a)} Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia;

^{b)} AirBridgeCargo Airlines LLC, Ulyanovsk, Russia

The article develops methods for constructing economic (analytical) indexes in the framework of the holistic theory of market demand, built in recent years. By this, the economic indexes presented in the world literature within the framework of the theory of individual demand and, accordingly, related to households, acquire practical value.

The introduction provides a brief overview of the main problems of modern indexology and the implementation of an economic approach dating back to the classical work of 1924 by the Soviet statistician A.A. Konüs. The properties of the most well-known «formula» indexes of Laspeyres, Paasche, and Fischer with respect to the fulfillment of the Fisher test criteria are described. These indexes play an important role in the methods proposed by the authors for constructing analytical indexes, which are determined through the function of consumer expenditures. The latter is determined by a utility function that rationalizes trade statistics. The rationalizing utility function is constructed ambiguously, and the corresponding task should be specified. Methods for its solution are proposed, developed within a non-parametric demand analysis of Afriat-Varian. The core of this analysis is the system of linear Afriat's inequalities that determine the values of the utility function and marginal utility corresponding to statistical demand. This system can be inconsistent and unstable with respect to variations of non-exact demand statistics. In the case of compatibility, inequalities have many solutions, and the choice of different solutions of inequalities gives different values of analytical indexes. The authors suggest three types of tasks for the stable solution of Afriat's inequalities, which define indexes with characteristics of optimism (low price indexes and high quantity indexes), pessimism (vice versa) and objectivity.

Therefore, the problem of increasing the objectivity of consumer demand indexes receives a theoretically justified toolbox - methods for calculating analytical market demand indexes that take into account, in contrast to formula indices, consumer preferences.

Keywords: market demand, formula indexes, Fisher tests, Konüs and invariant indexes, Afriat inequalities, optimistic and pessimistic indexes.

JEL: C43, C61, E31, E71.

doi: <https://doi.org/10.34023/2313-6383-2020-27-3-65-80>.

For citation: Gorbunov V.K., Kozlova L.A., Lvov A.G. To the Problem of Constructing Analytical Indexes of Market Demand: A Variative Approach. *Voprosy Statistiki*. 2020;27(3):65-80. (In Russ.)

Введение: проблема индексов спроса

Теория и методы построения индексов спроса существуют более двух столетий, но проблема построения объективных «истинных индексов» оказалась неразрешимой в рамках используемого в практике статистических органов *формульного* подхода, где индексы цен и количеств потребления вычисляются по формулам элементарной математики по двум парам данных «цены - количества» для сравниваемых периодов формирования торговой статистики - базисного и текущего. При этом основное внимание в литературе и практике уделяется индексу цен, важному для предпринимательской деятельности, особенно на финансовых рынках, в то время как ситуация в производящей экономике и уровне жизни отражается прежде всего через индекс количества потребления.

Формульные индексы, представляющие изменение усредненных цен и количеств между двумя периодами, называются в международном Руководстве по индексу потребительских цен (далее - Руководство по ИПЦ) *двусторонними (bilateral)* [1, гл. 1-16]. К середине XX века было предложено несколько десятков первичных классов формул и необозримое множество их комбинаций (скрещиваний) [2]. Различные индексные формулы обычно дают различные результаты, и для оценки качества формульных индексов Ирвинг Фишер, считавший, что «каждая формула в какой-то степени ошибочна» [2, с. 71], предложил в книгах, вышедших

в 1911 и 1922 гг. (цитированы в [2 и 3]), систему аксиом-тестов, называемых в [1] *критериями*. Но до настоящего времени «не существует всеобщего согласия относительно того, какой набор “разумных” аксиом является “наилучшим”» [1, с. 373 / п. 16.2]. Это позволяет подбирать индексы в зависимости от целей экономического анализа или различных групп влияния на экономическую политику. Так, правительство заинтересовано в оптимистических оценках социально-экономической ситуации, а профсоюзы и оппозиция - в пессимистических. Релятивизм современной индексологии отражает статья автора ряда глав Руководства по ИПЦ Э. Диверта [4]. В практике статистические службы в основном используют формульный индекс цен Лоу (фиксированной, в частности, нормативной корзины) и его частные случаи - индексы цен Ласпейреса и Пааше, а также их среднегеометрические - индекс цен Фишера. Как правило, индексы Пааше имеют меньшие значения, чем индексы Ласпейреса (эффект Гершенкрона), и индексы Фишера считаются лучшими в классе формульных индексов относительно выполнения критериев Фишера [1, с. 383]. Отметим в заключение обсуждения формульного направления, что авторитетный на западе контрибьютор экономической индексологии Сидней Африат в недавней книге высказался относительно множества других формул и подходов радикально: «The large attention given to such formulae makes a rubbish-heap of history»¹ [5, p. v].

¹ Большое внимание, уделенное таким формулам, создает свою кучу мусора истории (*перевод авт.*).

Идея построения индексов спроса с учетом потребительских предпочтений, представляемых функцией полезности, впервые высказана и частично реализована в 1924 г. в работе А.А. Конюса [6], где в качестве индекса цен был предложен *истинный индекс стоимости жизни* (ИСЖ, cost-of-living index). Эта идея получила формальное развитие во многих зарубежных публикациях, центральной из которых является статья П. Самуэльсона и С. Свэйми [7], определившая дальнейшие исследования большинства авторов по индексам спроса. В этой статье, в частности, отмечается большая важность для оценки экономической динамики индекса количества, чем индекса цен.

Отметим также работы [8 и 9], в которых утверждается, что только концепция индексов Конюса имеет теоретическое обоснование и перспективы развития. Индексы Конюса были названы «экономическими», так как они определяются в рамках теории потребительского спроса – базовом разделе экономической теории – через функцию минимальных потребительских расходов, обеспечивающих некоторый уровень полезности покупаемого набора благ, то есть уровень функции полезности. Этот подход также называется *аналитическим* [10], что отражает характер современной неоклассической теории индивидуального потребительского спроса, построенной (в рамках методологического индивидуализма) на языке математического анализа [11, Chs. 1-3]. Аналитические индексы сужают произвол построения индексов, повышая их объективность. Но до настоящего времени эти индексы не имели достаточной алгоритмической поддержки, так как в середине XX века было выяснено, что теория индивидуального спроса не применима к рыночному спросу, понимаемому как сумма индивидуальных спросов [11, Ch. 4].

Проблеме практической приближенной реализации концепции ИСЖ на основе эвристического подхода Э. Дитона и Дж. Мюльбауэра (прямое моделирование «систем спроса») к анализу рыночного спроса [12] посвящена работа [9], но до настоящего времени в зарубежной литературе теория аналитических индексов относится лишь к индивидам или домашним хозяйствам [1, гл. 17-18] и остается математизированной схо-

ластикой. Интерес к экономическим индексам и сожаление о том, что они мало используются на практике, высказаны в работах специалиста по международным экономическим сопоставлениям Ю.Н. Иванова [13, с. 370; 14, с. 12; 15, с. 29].

Концепция экономических индексов Конюса, ограниченная индивидуалистической теорией спроса, более пятнадцати лет как обоснована в рамках холистической (целостной) теории рыночного спроса и представлена в книгах В.К. Горбунова [16 и 17]. В этой теории, формально повторяющей теорию индивидуального спроса, объектом является не индивид со свойствами рациональности и независимости (это не соответствует реальному поведению большинства людей), а рынок, представленный статистической торговлей. Этим обеспечена экономическая «легитимность» аналитических индексов. В указанных книгах, диссертации [18] и статьях [19 и 20] изложены методы построения инвариантных (для однородных предпочтений) общих индексов Конюса-Фишера, причем в различных допустимых вариантах с содержательными свойствами пары индексов цен и количеств (оптимизм, пессимизм и объективность). К оптимистическим оценкам изменения социально-экономической ситуации склонны органы власти, а к пессимистическим – оппозиция и независимые профсоюзы. Наши методы построения аналитических индексов развивают непараметрический анализ спроса, предложенный С. Африатом [21] и развитый в основном Хэлом Вэрианом [21 и 23]. Данная статья посвящена развитию непараметрического метода построения различных аналитических индексов. Приводятся примеры построения таких индексов для реальной статистики потребления продуктов питания в Ульяновской области.

1. Индексы Ласпейреса, Пааше и Фишера

Далее проблема индексов спроса рассматривается для рынка n благ², представленных статистикой данных о количествах продаж $x^t \in E_+^n$, цен $p^t \in E_+^{n*}$ (сопряженное пространство) и расходов e_t за отчетные периоды t :

$$\{p^t, x_t : t = \overline{0, T}\}, e_t = \langle p^t, x^t \rangle. \quad (1)$$

² Блага могут быть элементарными, имеющими меры количества и цены, или некоторыми содержательными агрегатами (фрукты, питание и т. д.). Вопросы первичного агрегирования статистических данных относятся к компетенции органов статистики [1, разделы 1-14].

Для упрощения многих формул будем использовать «перекрестные стоимости» $e_{ts} = \langle p^t, x^s \rangle$.

До настоящего времени статистические службы всех стран используют в основном двусторонние формульные индексы цен, вычисляемые по формулам элементарной математики по базисной (p^s, x^s) и текущей (p^t, x^t) парам статистических данных. Считая индекс количеств (продаж) не менее важным для анализа социально-экономической динамики, мы будем, в отличие от Руководства по ИПЦ и многих авторов, уделяющих основное (если не все) внимание индексу цен, представлять свойства обоих индексов равноправно.

Основными для статистических служб и нашего исследования являются индексы Е. Ласпейреса и М. Пааше:

$$P_{st}^L = \frac{\langle p^t, x^s \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle} = \frac{e_{ts}}{e_s}, \quad Q_{st}^L = \frac{\langle p^s, x^t \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle} = \frac{e_{st}}{e_s};$$

$$P_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^s, x^t \rangle} = \frac{e_t}{e_{st}}, \quad Q_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^t, x^s \rangle} = \frac{e_t}{e_{ts}}. \quad (2)$$

Для индексов Ласпейреса и Пааше в большинстве случаев наблюдается эффект Гершенкрона: $P_{st}^P \leq P_{st}^L$, $Q_{st}^P \leq Q_{st}^L$ ³, и в качестве компромисса рассматриваются среднегеометрические от индексов (2) индексы Фишера:

$$P_{st}^F = \sqrt{P_{st}^L P_{st}^P} = \sqrt{\frac{e_{ts} e_t}{e_s e_{st}}}, \quad Q_{st}^F = \sqrt{Q_{st}^L Q_{st}^P} = \sqrt{\frac{e_{st} e_t}{e_s e_{ts}}}. \quad (3)$$

Имея в виду использование произвола в выборе формул для оценки социально-экономической ситуации, пару индексов (P_{st}^P, Q_{st}^L) можно назвать *оптимистической*, а пару (P_{st}^L, Q_{st}^P) - *пессимистической*. Однако эти пары рассогласованы по типу, а из согласованных пар (P_{st}^L, Q_{st}^L) и (P_{st}^P, Q_{st}^P) пара Ласпейреса оптимистическая по индексу количества, пара Пааше - по индексу цен. Но если учитывать, что показатель количества потребления более важен для оценки социально-экономической динамики, то система Ласпейреса должна быть предпочтительнее для правительства, а система Пааше - для оппозиции и профсоюзов. Однако индекс цен считается основным, информация

по ценам надежнее и собирается быстрее, что обеспечивает операциональное преимущество индекса цен Ласпейреса⁴.

Смысл тестов/критериев И. Фишера [1, с. 378-382 / пп. 16.34-16.56] - установление соответствия свойств «правильных» индексов (P_{st}^0, Q_{st}^0) свойствам элементарных индексов цен p_i^t/p_i^s и количеств x_i^t/x_i^s , $i = 1, n$. Наиболее важными и проблемными для совмещения являются следующие критерии: обратимость во времени, то есть $P_{ts}^0 = 1/P_{st}^0$, $Q_{ts}^0 = 1/Q_{st}^0$; произведение, то есть $P_{st}^0 \cdot Q_{st}^0 = e_t/e_s$; транзитивность, то есть для любых трех периодов (r, s, t) справедливы равенства $P_{rt}^0 = P_{rs}^0 \cdot P_{st}^0$ и $Q_{rt}^0 = Q_{rs}^0 \cdot Q_{st}^0$. Известно, что индексы Ласпейреса и Пааше (2) не удовлетворяют этим критериям, но данным индексам придается особое значение, и 16-м критерием Фишера является ограничение «правильного» индекса цен P_{st}^0 индексами Пааше и Ласпейреса (в общем случае неупорядоченными), то есть $\min\{P_{st}^L, P_{st}^P\} \leq P_{st}^0 \leq \max\{P_{st}^L, P_{st}^P\}$. «Идеальный» по Фишеру индекс цен должен удовлетворять 21-му критерию, но в этом наборе нет критерия транзитивности, так как ни один двусторонний формульный индекс ему не удовлетворяет. Единственным индексом цен, удовлетворяющим списку критериев Фишера, оказался индекс цен из пары (3). Распространение необходимых критериев на индексы количеств с учетом критерия произведения показало, что пара индексов Фишера (3) является лучшей парой в классе двусторонних формульных индексов.

2. Аналитические индексы

2.1. Определение и основные свойства. «Экономические» индексы (индексы Конюса), определяемые в [1-5, 7-10]⁵ для домашних хозяйств и индивидуальных потребителей и названные в [10] аналитическими, введены в [16] (как индексы рационального потребления) для торговой статистики (1) в рамках теории рыночного спроса, представляющей содержательные результаты математического анализа регулярной модели максимизации коллективной функции полезности $u(x)$, $x \in E_+^n$ исследуемого рынка при расходом

³ Для однородных предпочтений этот эффект обязателен [17, п. 7.4.3], и в общем случае он является следствием *эффекта замещения*, заключающегося в замене покупателями относительно подорожавших благ относительно подешевевшими [1, п. 1.30-1.31]. Нарушение эффекта замещения, а значит и правила Гершенкрона, возможно для аномальных благ Гиффена, которые могут появляться, когда реальные доходы населения отстают от роста цен. Математическая модель эффекта Гиффена и пример из российской статистики 1990-х годов с нарушением правила Гершенкрона приведены в [17, с. 46-48, 182-183].

⁴ В СССР информация о количествах выпуска была надежной и строился индекс цен Пааше.

⁵ А. Конюс написал [6] задолго до выявления нерациональности суммы индивидуальных спросов.

условии, определяемом ценами p и расходами e всех потребителей⁶:

$$\max\{u(x) : \langle p, x \rangle \leq e, x \geq 0\}. \quad (4)$$

Регулярность модели (4) означает, что решение экстремальной задачи единственно и его зависимость от параметров $x(p, e)$ - непрерывная и дифференцируемая функция спроса. Достаточными условиями регулярности являются свойства функции $u(\cdot)$: дважды непрерывная дифференцируемость, возрастание и строгая квазивогнутость. Важную роль в теории спроса и аналитических индексов играет множитель Лагранжа этой задачи $\lambda(p, e)$, имеющий смысл предельной полезности расходов. Значения функции полезности и множителя на статистических данных (1) $u_t = u(x^t)$ и $\lambda_t = \lambda(p^t, e_t)$ называются *числами Аффриата*.

Аналитические индексы определяются через функцию потребительских расходов

$$e(p, w) = \min\{\langle p, x \rangle : u(x) \geq w, x \geq 0\}, \quad (5)$$

где $w = u(x')$, x' - референтный набор.

Определение 1⁷. Аналитическими индексами изменения цен и количеств потребления между периодами сравнения - базового s и текущего t - называются, соответственно, отношения

$$P(p^t, p^s; x) = \frac{e(p^t, u(x))}{e(p^s, u(x))},$$

$$Q(x^t, x^s; p) = \frac{e(p, u(x^t))}{e(p, u(x^s))}, \quad (6)$$

где векторы количеств x и цен p представляют референтные ситуации сравнения (reference price/quantity situation) [7].

Для практического применения индексов (6) в качестве ситуаций сравнений следует использовать их статистические значения для периодов s или t . В первом случае получим индексы *Конюса-Ласпейреса* $P_{st}^{KL} \triangleq P(p^t, p^s; x^s)$, $Q_{st}^{KL} \triangleq Q(x^t, x^s; p^s)$ и во втором - индексы *Конюса-Пааше* $P_{st}^{KP} \triangleq P(p^t, p^s; x^t)$, $Q_{st}^{KP} \triangleq Q(x^t, x^s; p^t)$. Далее основное значение придается индексам *Конюса-Фишера* (КФ) $P_{st}^{KF} \triangleq (P_{st}^{KL} P_{st}^{KP})^{1/2}$, $Q_{st}^{KF} \triangleq (Q_{st}^{KL} Q_{st}^{KP})^{1/2}$. Используя равенство $e(p^s, u(x^s)) = e_s$, запишем индексы конструктивно:

$$P_{st}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^t, u_s)e_t}{e_s e(p^s, u_t)}}, \quad Q_{st}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^s, u_t)e_t}{e_s e(p^t, u_s)}}. \quad (7)$$

Свойства индексов КФ изложены в [17, гл. 7], из которых отметим выполнение критериев обратимости, произведения и ограничения индексами Ласпейреса и Пааше: $\min\{P_{0t}^P, P_{0t}^L\} \leq P_{0t}^{KF} \leq \max\{P_{0t}^P, P_{0t}^L\}$, $\min\{Q_{0t}^P, Q_{0t}^L\} \leq Q_{0t}^{KF} \leq \max\{Q_{0t}^P, Q_{0t}^L\}$. Задача построения индексов КФ сводится к определению значений $e(p^t, u_s)$ и $e(p^s, u_t)$. Ниже излагается метод определения этих значений по числам Аффриата $\{\lambda_t, u_t\}$.

2.2. Инвариантные индексы. Для теории и методов построения индексов Конюса большое значение имеет случай *однородных предпочтений*, когда два эквивалентных набора благ $x \sim x'$ остаются эквивалентными при одинаковом масштабировании: $ax \sim ax'$ для любого числа $a > 0$. Такие предпочтения представляются *линейно однородными* функциями полезности⁸. В этом случае [17, п. 5.6, п. 6.1.4] функция спроса имеет структуру $x(p, e) = \hat{x}(p)e$, где $\hat{x}(p) = x(p, 1)$ - удельный спрос, $\lambda(p) = u(\hat{x}(p))$. При этом все блага являются равноценными, кривые Энгеля (траектории потребления при постоянных ценах и изменении расходов) становятся лучами. Кроме того, выполняется тождество

$$e(p, u(x)) = \frac{u(x)}{\lambda(p)}, \quad p > 0, \quad x > 0. \quad (8)$$

Тождество (8) при подстановке данных (p^t, x^t) принимает вид $u_t = \lambda_t e_t$. Соответствующие числа $\{u_t\}$ и $\{\lambda_t\}$ называются *однородно сопряженными*. Использование (8) в формулах (6) приводит к их упрощению:

$$P_{st} \triangleq P(p^t, p^s; x) = \frac{\lambda_s}{\lambda_t},$$

$$Q_{st} \triangleq Q(x^t, x^s; p) = \frac{u_t}{u_s} = \frac{\lambda_t e_t}{\lambda_s e_s}. \quad (9)$$

Ввиду независимости индексов (9) от ситуаций сравнения они названы в [7] *инвариантными индексами*. Там же отмечается, что инвариантные индексы удовлетворяют всем упомянутым и другим критериям Фишера, в том числе критерию

⁶ В микроэкономике [11] параметр e обозначается w и понимается как бюджет или уровень благосостояния (wealth level) индивида/домашнего хозяйства [1], что делает эту теорию неоперативной.

⁷ На основе определений «экономических индексов» в [7].

⁸ Функция $u(\cdot)$ называется линейно однородной, если $u(ax) = au(x)$, $\forall a > 0$.

транзитивности и упорядоченным ограничениям индексами Пааше и Ласпейреса $P_{0t}^P \leq P_{0t} \leq P_{0t}^L$, $Q_{0t}^P \leq Q_{0t} \leq Q_{0t}^L$.

Предположение однородности предпочтений, когда исключается изменение структуры потребления благ $\hat{x}(p)$ с изменением доходов потребителей, является сильным упрощением реальности, и это предположение отсутствует в общепринятом определении рациональности потребителей (рациональность - это полнота и транзитивность отношения предпочтения [11, Def. 3. В. 1, р. 42]). С. Африат после фундаментальной работы [21], в которой был указан путь эффективного решения вопроса верификации модели потребительского спроса (4) по статистике (1), объявил однородность предпочтений *концептуальным базисом индекса цен* [24, р. 47], а индекс цен P_{st} из (9) *истинным*, не рассматривая индекс количества потребления и неоднородные предпочтения. Объяснение этой особой позиции можно найти в его книге [5, р. 5-15], где он ставит и решает проблему совмещения ограничений истинного индекса цен упорядоченными индексами Пааше и Ласпейреса с транзитивностью и показывает, что этим требованиям удовлетворяет только индекс P_{st} .

Отмечая простоту и идеальность (по Фишеру) инвариантных индексов (9), авторы работ [7, р. 592; 25] подчеркивали нереалистичность однородности предпочтений и назвали это предположение «гипотезой Санта Клауса». Гипотеза однородности нередко не отвергается при обработке агрегированных данных, но это естественно считать следствием грубости модели рыночного спроса при высоком уровне агрегирования благ и недостаточностью данных о спросе (1) для надежного построения функции полезности. Простота индексов (9), определяемых только отношениями чисел Африата $\{\lambda_t\}$, стимулирует их построение как первого приближения индексов КФ (7), и это можно считать аналогом *линеаризации нелинейных процессов*, упрощающим получение первого приближения сложной задачи построения общих индексов, более адекватно представляющих реальность.

⁹ Функция полезности $u(\cdot)$ называется ненасыщаемой, если в любой окрестности точки $x \in E_+^n$ существует такая точка $x' \geq 0$, что $u(x') > u(x)$.

3. Непараметрический метод анализа спроса

3.1. Системы неравенств Африата. Изложим основные факты непараметрического анализа потребительского спроса Африата-Вэриана [21-23; 17, гл. 8]. Этот метод разработан с целью выяснения вопроса, является ли статистика потребления (1) совместимой с неоклассической моделью (индивидуального) спроса (2) в классе *ненасыщаемых функций полезности*⁹? Согласно теореме Африата [22, р. 946; 17, п. 8.3.1] основным критерием существования такой функции полезности, рационализирующей статистику (1) (то есть количества x' являются решениями (4), где $p = p^t, e = e_t$), является положительная разрешимость системы *общих неравенств Африата*

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \leq 0; s, t = \overline{0, T} \wedge s \neq t, \quad (10)$$

где $a_{ts} = \langle p^t, x^s - x^t \rangle = e_{ts} - e_t$.

Более того, если $\{u_t > 0, \lambda_t > 0\}$ - решение системы (10), то *функция Африата*

$$\bar{u}(x) = \min_t \{u_t + \lambda_t p^t, x - x^t\} \quad (11)$$

рационализирует данные (1).

В случае однородных предпочтений равенства однородной сопряженности $u_t = \lambda_t e_t$ приводят систему общих неравенств Африата (10) к двум эквивалентным, однородным по предпочтениям λ -системе и u -системе:

$$\lambda_s e_s \leq \lambda_t e_{ts}; u_s e_t \leq u_t e_{ts}; s, t = \overline{0, T} \wedge s \neq t. \quad (12)$$

Решение одной из этих систем определяет равенством $u_t = \lambda_t e_t$ решение другой, и для построения инвариантных индексов достаточно ограничиться λ -системой.

3.2. Известные методы решения. Африат, ограничившийся однородными предпочтениями, разработал в 1970-х годах комбинаторные алгоритмы определения некоторого решения λ -системы $\lambda_s e_s \leq \lambda_t e_{ts}$ и ее релаксированного варианта $\lambda_s e_s \leq \omega \lambda_t e_{ts}$, где параметр $\omega \geq 0$ выбирается наименьшим для обеспечения совместности неравенств (*critical cost efficiency*) [24, р. 39; 5].

Странная своей категоричностью, противоречивой реальностью, позиция Африата не разделяется известными авторами индексологии, в частности Вэрианом и Дивертом, развившими непараметрический анализ Африата и методы построения индексов Конюса в общем случае, рассматривая однородность предпочтений как упрощенный частный случай. Вэриан для общей системы (10) предложил свои комбинаторные алгоритмы анализа статистики (1) на рационализированность в терминах теории выявленных предпочтений [22], и для λ -системы он модифицировал алгоритм Варшалла, предназначенный для поиска пути минимальной стоимости между вершинами связного графа [23]. Алгоритм Варшалла-Вэриана используется в [26, 27] и других работах А. Шананина с соавторами, неявно следующих концепции Африата. Применения этих методов к рыночной статистике в [22, 26 и 27] следует считать эвристическими¹⁰.

Другой подход к решению общей системы основан на переходе к задаче линейного программирования (ЛП), заключающейся в минимизации суммы искусственных переменных (*slack variables*) [28] или одной переменной [29], добавленных в неравенства (10) с целью обеспечения совместности.

Все эти подходы к получению некоторого решения из множества решений исходно совместной или минимально возмущенной системы не обеспечивают выбора, основанного на содержательных свойствах аналитических индексов. Кроме того, решения минимально возмущенных совместных систем могут быть неустойчивыми.

4. Содержательные решения неравенств Африата

4.1. Проблема корректности. Системы неравенств Африата (10) и (12) в случае совместности определяют многогранные множества решений, и каждое из таких решений допустимо для построения аналитических индексов. Несовместность этих неравенств возможна в силу неустранимых погрешностей исходных данных и в силу несоот-

ветствия гипотезы рациональности коллективного выбора данному рынку, что не исключается для любой нетривиальной научной теории. Несовместность неравенств при вариациях данных влечет неустойчивость множества решений относительно этих вариаций. Соответственно, аналитические индексы могут строиться неоднозначно, различия допустимых индексов могут быть неприемлемыми и задача их построения должна рассматриваться как некорректно поставленная [30]. Такие задачи требуют *регуляризации*, то есть доопределения до задачи с единственным решением, непрерывно зависящим от исходных данных.

В [16 и 17] описан релаксационно-штрафной (РШ) метод решения систем Африата, обеспечивающий устойчивое построение инвариантных и квазиинвариантных индексов, наиболее близких к формульным индексам Фишера (3). Реализации этой задачи квадратичного программирования (КП) для реальных данных посвящены работы [18 и 19]. В [20] впервые предложен и реализован метод построения инвариантных (9) и общих индексов КФ (7) с различными свойствами - оптимизм, пессимизм и объективность. Однако в этой работе в функционалах соответствующих задач использовались эвристические квазиинвариантные индексы. В данной работе мы преодолеваем это искажение задач содержательного выбора индексов КФ из допустимого множества вариантов. Кроме того, в [20] подробно рассмотрена проблема регуляризации и выбора содержательных решений систем неравенств Африата. Алгоритмическая сторона регуляризации кратко представлена ниже.

Общая система (10) имеет две степени свободы (алгебраическая однородность и зависимость от разностей u -чисел), и постановка корректных задач ее решения основана на трех приемах:

1) введении двух условий на искомые числа Африата $\{u_t, \lambda_t : t = 0, \overline{T}\}$:

$$\lambda_0 = 1, u_0 = e_0; \quad (13)$$

2) введении в правые части неравенств аддитивного малого параметра релаксации r , обеспе-

¹⁰ Успех применения теории индивидуального спроса к рыночному спросу в работе Х. Вэриана [22], вопреки отрицанию неоклассической теорией коллективной рациональности, автор объясняет (р. 965) спецификой исследованного им послевоенного периода (1947-1978); в работах А. Шананина и его соавторов проблема отсутствия обоснованной теории рыночного спроса не обсуждается и рассматриваются только однородные предпочтения, причем однородность считается необходимым атрибутом рациональности, и поэтапное агрегирование [27] выполняется поиском подгрупп благ (без учета их типов), спрос на которые однороден относительно расходов.

чивающего совместность неравенств, устойчивость множества их решений и ограниченность возмущения решения требуемой точностью вычисления индексов;

3) введении критериев отбора чисел $\{u_t, \lambda_t\}$ в соответствии с желаемыми характеристиками соответствующих индексов (7).

После подстановки условий (13) в неравенства (10), введения параметра релаксации r и нормировки коэффициентов неравенств (с целью уменьшения вычислительных погрешностей и устранения эффекта масштаба исходных данных на величину релаксации) получаем *общую редуцированную релаксированную нормированную систему Африата*, определяющую переменные $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1, T}\}$:

$$\begin{cases} -\frac{u_t}{e_t} - \lambda_t \frac{a_{t0}}{e_t} \leq -\frac{e_0}{e_t} + r, & \frac{u_s}{e_s} \leq \frac{e_{0s}}{e_s} + r, \\ \frac{u_s}{\sqrt{e_s e_t}} - \frac{u_t}{\sqrt{e_s e_t}} - \lambda_t \frac{a_{ts}}{\sqrt{e_s e_t}} \leq r, & s, t = \overline{1, T} \wedge s \neq t. \end{cases} \quad (14)$$

При достаточно больших значениях r эта система совместна в области положительных чисел Африата и множество ее решений выпуклое (многогранное), ограниченное относительно u -чисел: $0 < u_s \leq e_{0s} + e_s r$.

В предположении однородности предпочтений выполняются равенства $u_t = \lambda_t e_t$, при которых система (14) принимает вид *однородной редуцированной нормированной релаксированной λ -системы Африата*:

$$\begin{cases} -\lambda_t \leq -\frac{e_0}{e_{t0}} + \frac{e_t}{e_{t0}} r, & \lambda_s \leq \frac{e_{0s}}{e_s} + r, \\ \lambda_s - \lambda_t \frac{e_{ts}}{e_s} \leq \sqrt{\frac{e_t}{e_s}} r, & s, t = \overline{1, T} \wedge s \neq t. \end{cases} \quad (15)$$

При достаточно больших значениях r множество решений (15) непустое и является ограниченным многогранником.

4.2. Вычисление функции потребительских расходов. Для вычисления индексов КФ (7) необходимо вычисление значений функции потребительских расходов $e(p, w)$ для различных значений аргументов. Рационализирующая кусочно-линейная функция полезности Африата (11) делает соответствующие задачи (5) простыми задачами ЛП. Рассмотрим такую задачу с условиями (13).

Условия минимизации $\bar{u}(x) \geq w, x \geq 0$, очевидно, эквивалентны системе линейных неравенств

$$\begin{cases} \langle p^0, x \rangle \geq w, & \lambda_\tau \langle p^\tau, x \rangle \geq w - u_\tau + \lambda_\tau e_\tau, \\ \tau = \overline{1, T}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (16)$$

и вычисление $e(p, w)$ сводится к задаче минимизации функции $\langle p, \cdot \rangle$ при условиях (16):

$$e(p, w) = \min \{ \langle p, x \rangle : (16) \}. \quad (17)$$

Задача ЛП (17) разрешима в силу неотрицательности минимизируемой функции $\langle p, \cdot \rangle$ и совместности системы (16) в пространстве благ E_+^n при любых положительных параметрах $\{p_\tau, w, \lambda_\tau, u_\tau\}$. Построение индексов КФ (7) сводится к определению значений этой функции $e(p^\tau, u_s)$. Каждое положительное решение совместной редуцированной системы Африата (14) определяет свой набор индексов Конюса.

4.3. Задачи для однородной системы. На первом этапе находятся содержательные решения более простой λ -системы (15) и строятся инвариантные индексы (9). Параметр релаксации r выбирается следующим образом. Решается однородная задача минимальной релаксации системы (15) в пространстве переменных $\{\lambda_1, \dots, \lambda_T, r\}$:

$$r_\lambda = \operatorname{argmin} \{ r : (15), \lambda \geq 0 \}. \quad (18)$$

Эта задача ЛП разрешима при любых данных (1), определяющих коэффициенты системы (15) в силу ограниченности снизу минимизируемой переменной. Если $r_\lambda < 0$, то λ -система (15) регулярна при $r = 0$. Если параметр $r_\lambda \geq 0$ и достаточно мал, то можно использовать релаксированную систему (15) с $r = r_\lambda$, но такая минимально релаксированная система не имеет внутренних точек и может стать несовместной при сколь угодно малых возмущениях данных. Для придания устойчивой совместности множеству решений (15), или же его *регуляризации*, и непрерывности решений (18) параметр r_λ увеличивается на умеренно малую положительную *величину сверхрелаксации* ρ , обеспечивающую устойчивость этого множества при $r = r_\lambda^\rho \triangleq r_\lambda + \rho$ и небольшие возмущения индексов (в четвертом десятичном знаке). Если оказывается, что $r_\lambda \leq -\rho$, то принимается $r_\lambda^\rho = 0$. Этот выбор кратко представляется как $r = r_\lambda^\rho = \max \{ r_\lambda + \rho, 0 \} \geq 0$. Подробнее в [20].

Задача (18) имеет техническое значение, и формально допустимые в рамках непараметрического метода инвариантные индексы (9), построенные по λ -компонентам $(\lambda_1^r, \dots, \lambda_T^r)$ ее решения $(\lambda_1^r, \dots, \lambda_T^r, r_\lambda^r)$, как и индексы, построенные по

решению Вэриана-Варшалла, не имеют содержательных характеристик, выделяющих их из других инвариантных индексов, определяемых допустимыми решениями. Содержательные решения $(\lambda_1, \dots, \lambda_T)$ системы (15) с $r = r_\lambda^0$ будем выбирать, ориентируясь на соответствующие базовые индексы $\{P_{0r}, Q_{0r}\}$, определяемые решением $(\lambda_1, \dots, \lambda_T)$ простыми формулами (9), где $\lambda_0 = 1, u_0 = e_0$. На данном этапе ради упрощения оценки качества получаемых индексов $\{P_{0r}, Q_{0r}\}$ наборы с конечными (терминальными) наименьшим индексом цен P_{0T} и с наибольшим индексом количеств Q_{0T} будем считать оптимистическими, а наборы с наибольшим P_{0T} и с наименьшим Q_{0T} - пессимистическими. Двухкритериальные задачи построения таких индексов в силу формул $P_{0r} = 1/\lambda_r, Q_{0r} = (\lambda_r e_r)/e_0$ являются обычными задачами ЛП.

Первая однородная задача. Найти решение λ -системы (15) с максимальным множителем λ_T :

$$\lambda_T^{\max} = \arg \max_{\lambda} \{\lambda_T : (15)\}. \quad (19)$$

Решение $(\lambda_1^{Mh}, \dots, \lambda_T^{Mh})$ этой задачи ЛП определяет оптимистические инвариантные индексы цен $P_{0r}^{(opt)} = 1/\lambda_r^{Mh}$ и количества $Q_{0r}^{(opt)} = (\lambda_r^{Mh} e_r)/e_0$, так как $P_{0r}^{(opt)}$ является наименьшим из допустимых индексов цен, а $Q_{0r}^{(opt)}$ - наибольшим из допустимых индексов количеств. Здесь и далее выражения вида $P_{st}^{(\cdot)}$ и $Q_{st}^{(\cdot)}$ обозначают различные инвариантные/однородные индексы для одной статистики.

Вторая однородная задача. Найти решение λ -системы (15) с минимальным множителем λ_T :

$$\lambda_T^{\min} = \arg \min_{\lambda} \{\lambda_T : (15)\}. \quad (20)$$

Здесь решение $(\lambda_1^{mh}, \dots, \lambda_T^{mh})$ определяет пессимистические инвариантные индексы цен $P_{0r}^{(pes)} = 1/\lambda_r^{mh}$ и количества $Q_{0r}^{(pes)} = (\lambda_r^{mh} e_r)/e_0$, так как $P_{0r}^{(pes)}$ является наибольшим из допустимых индексов цен, а $Q_{0r}^{(pes)}$ - наименьшим из допустимых индексов количеств.

Для выбора объективного решения λ -системы (15) можно находить решение, определяющее инвариантные индексы, наиболее близкие почти идеальным индексам Фишера (3). Если составлять функционал метода наименьших квадратов (МНК) с разностями индексов $P_{0r} - P_{0r}^F = \lambda_r^{-1} - P_{0r}^F$, то получим невыпуклый функционал и задачу нелинейного программирования. Переходя к эквивалентному функционалу с разностями обратных индексов $P_{0r} - P_{0r}^F = \lambda_r - \lambda_r^F$, где $\lambda_r^F = P_{0r}^F$ - компоненты чисел Аффриата-Фишера, составляющие точку

Фишера $(\lambda_1^F, \dots, \lambda_T^F)$, получим более простую задачу квадратичного программирования (КП).

Третья однородная задача. Найти решение λ -системы (15), для которого соответствующий набор обратных инвариантных индексов цен $\{P_{0r} = \lambda_r\}$ наиболее близок к набору обратных индексов цен Фишера $\{P_{0r}^F\}$ по мере МНК:

$$F_\lambda^{\min} = \min \left\{ \sum_{r=1}^T (\lambda_r - \lambda_r^F)^2 : (15) \right\}. \quad (21)$$

Решение $(\lambda_1^{Fh}, \dots, \lambda_T^{Fh})$ этой задачи является проекцией точки Фишера $(\lambda_1^F, \dots, \lambda_T^F)$ на множество решений системы (15). Такая задача имеет единственное решение, непрерывно зависящее от исходных данных. Это решение определяет инвариантные индексы цен $P_{0r}^{(Fh)} = 1/\lambda_r^{Fh}$ и количества $Q_{0r}^{(Fh)} = (\lambda_r^{Fh} e_r)/e_0$. Индексы $\{P_{0r}^{(Fh)}, Q_{0r}^{(Fh)}\}$ можно считать объективными инвариантными индексами.

Следует отметить, что использование функционалов - терминальных (19) и (20), а также МНК (21) не гарантирует близость промежуточных индексов $\{P_{0r}^{(\cdot)}, Q_{0r}^{(\cdot)}\}$ к индексам Фишера $\{P_{0r}^F, Q_{0r}^F\}$. Но в однородном случае эти отклонения по нашему опыту несущественны.

4.4. Задачи для общей системы. На втором этапе строятся решения задач для общей релаксированной системы (14), аналогичных однородным задачам λ -системы (15). Регуляризация общей системы (14) выполняется аналогично. Решается *общая задача минимальной релаксации* (14) в пространстве переменных $\{\lambda_1, \dots, \lambda_T, u_1, \dots, u_T, r\}$, где совместность системы очевидна:

$$r_{\lambda u} = \operatorname{argmin}\{r : (14), \lambda \geq 0, u \geq 0\}. \quad (22)$$

Далее определяется параметр сверхрелаксации $\rho > 0$ и в (14) закрепляется значение $r = r_{\lambda u}^0 = \max\{r_{\lambda u} + \rho, 0\}$.

Первые две задачи содержательного решения системы (14) аналогичны задачам (19) и (20) для однородной системы (15). Прямая подстановка соответствующих формул (7) привела бы к сложным задачам нелинейного программирования с функционалами, вычисление которых требует решения задач (17), и в [20] вместо индексов КФ (7) в функционалах использовались эвристические квазиинвариантные индексы. Здесь мы применяем простые линейные функционалы, экстремизация которых эквивалентна экстреми-

зации индексов P_{0T}^{KF} и Q_{0T}^{KF} . Это возможно благодаря структуре индексов:

$$P_{0t}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^t, e_0)e_t}{e_0e(p^0, u_t)}}, \quad Q_{0t}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^0, u_t)e_t}{e_0e(p^t, e_0)}}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (23)$$

В оптимистической задаче следует минимизировать индекс цен P_{0T}^{KF} . Соответствующее решение в силу критерия произведения $P_{0T}^{KF} Q_{0T}^{KF} = e_t/e_0$ обеспечит максимизацию индекса количества потребления Q_{0T}^{KF} . Функция потребительских расходов $e(p, w)$ строго возрастает относительно уровня потребления w (повышение уровня возможно при росте расходов), поэтому из формул (23) следует, что индекс P_{0T}^{KF} убывает с ростом числа u_t , а индекс Q_{0T}^{KF} возрастает. Таким образом, задача оптимистического выбора решения общей системы Африата (14) с параметром $r = r_{\lambda u}^0$ заключается в выборе решения $(\lambda_1^{Mg}, \dots, \lambda_T^{Mg}, u_1^{Mg}, \dots, u_T^{Mg})$ с максимальным значением

$$u_T^{Mg} = \text{agmax}\{u_t : (14)\}. \quad (24)$$

Аналогично, задача пессимистического выбора решения общей системы (14), обеспечивающая максимальное значение P_{0T}^{KF} и минимальное значение Q_{0T}^{KF} , заключается в выборе решения этой системы $(\lambda_1^{mg}, \dots, \lambda_T^{mg}, u_1^{mg}, \dots, u_T^{mg})$ с минимальным значением

$$u_T^{mg} = \text{agmin}\{u_t : (14)\}. \quad (25)$$

Опыт решения задач (24) и (25) показал, что без наложения дополнительных условий решения общей системы обычно имеют большие вариации соседних компонент с разными знаками, и даже нулевые значения. Для устранения этих нежелательных эффектов в качестве приемов регуляризации можно накладывать дополнительные ограничения на выбор решения. В [20] для реальной статистики потребления продуктов питания использовались условия монотонности множителей, проявившейся в однородном варианте, и отсечения от нуля. Здесь мы используем решения однородных задач (19) и (20) вместе с сопряженными числами $u_t^{Mh} = \lambda_t^{Mh} e_t$ и $u_t^{mh} = \lambda_t^{mh} e_t$, то есть векторные пары $(\lambda_t^{Mh}, u_t^{Mh})$ и $(\lambda_t^{mh}, u_t^{mh})$ как ориентиры (шаблоны) получения более оптимистических и пессимистических общих индексов. Для этого вводится две дополнительные к (14) системы ограничений. Первая система устанавливает управляемый коридор отклонения от одного

из этих шаблонов. В оптимистическом варианте это система неравенств

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)\lambda_t^{Mh} &\leq \lambda_t \leq (1 + \alpha)\lambda_t^{Mh}, \\ (1 - \alpha)u_t^{Mh} &\leq u_t \leq (1 + \alpha)u_t^{Mh}, \quad t = \overline{1, T}. \end{aligned} \quad (26)$$

Параметр $\alpha > 0$ определяет относительную величину допустимых отклонений компонент искомого решения общей системы (19) от шаблона $(\lambda_t^{Mh}, u_t^{Mh})$. В случае $0 \leq r_{\lambda u} < r_{\lambda}$ при малых значениях α неравенства (26) могут быть несовместными с (19), но с увеличением α совместность, очевидно, восстановится.

Вторая дополнительная система накладывает качественное условие *комонотонности* искомого решения с заданным прообразом.

Определение 2. Последовательности чисел $\{z_0, z_1, \dots, z_T\}$ и $\{z_0^*, z_1^*, \dots, z_T^*\}$ называются *комонотонными*, если для $t = \overline{1, T}$ выполняются неравенства $(z_t^* - z_{t-1}^*)(z_t - z_{t-1}) \geq 0$.

Введем для одной из последовательностей, например $\{z_t^*\}$, подмножества индексов из $\{1, \dots, T\}$: *убывания* $T_z^+ = \{t : z_{t-1}^* < z_t^*\}$ и *роста* $T_z^- = \{t : z_{t-1}^* > z_t^*\}$. Тогда условием комонотонности последовательностей $\{z_t\}$ и $\{z_t^*\}$ будет выполнение неравенств $z_{t-1} \leq z_t, t \in T_z^+; z_{t-1} \geq z_t, t \in T_z^-$. В случае $z_t^* = z_{t-1}^*$ условия между числами z_t и z_{t-1} не вводятся.

Для шаблона (λ^{Mh}, u^{Mh}) обозначим множества неубывания и невозрастания λ и u -компонент соответственно $T_{\lambda}^{M+}, T_u^{M+}, T_{\lambda}^{M-}, T_u^{M-}$. Тогда неравенства комонотонности решений (λ, u) системы (14) и (λ^{Mh}, u^{Mh}) составляют систему:

$$\begin{aligned} \lambda_{t-1} &\leq \lambda_t, \quad t \in T_{\lambda}^{M+}; \lambda_{t-1} \geq \lambda_t, \quad t \in T_{\lambda}^{M-}; \\ u_{t-1} &\leq u_t, \quad t \in T_u^{M+}; u_{t-1} \geq u_t, \quad t \in T_u^{M-}. \end{aligned} \quad (27)$$

В качестве объективных индексов КФ на данном этапе ограничимся простым способом усреднения оптимистических и пессимистических индексов. Если прямо усреднять индексы, построенные по решениям соответствующих регуляризованных задач (24) и (25), то возникает вопрос о принадлежности усредненных индексов этому классу, то есть вопрос существования решения (λ^g, u^g) общей системы (14), порождающего усредненные индексы. Принадлежность «усредненных» индексов классу КФ будет обеспечена, если их построить по среднеарифметическим числам решений задач (24) (λ^{Mg}, u^{Mg}) и (25) (λ^{mg}, u^{mg}) :

$$\bar{\lambda}_t^g = \frac{\lambda_t^{Mg} + \lambda_t^{mg}}{2}, \quad \bar{u}_t^g = \frac{\bar{u}_t^{Mg} + \bar{u}_t^{mg}}{2}. \quad (28)$$

5. Пример построения аналитических индексов

Приведем пример вариативного построения аналитических индексов, учитывающих усредненные потребительские предпочтения конкретного населения на некотором периоде, представленном статистикой потребления основных групп продуктов питания. Вариативность построения заключается в выборе вариантов решения неравенств Африата, определяющих аналитические индексы, в допустимых пределах и в соответствии с политическими или исследовательскими предпочтениями заказчиков или исследователей.

В таблицах 1-3 представлена статистика потребления в Ульяновской области в период

2006-2017 гг. следующих основных групп пищевых продуктов: 1 - хлебные продукты, 2 - картофель, 3 - овощи и бахчевые, 4 - фрукты и ягоды, 5 - мясо и мясопродукты, 6 - молоко и молочные продукты, 7 - яйца, 8 - рыба и рыбопродукты, 9 - сахар, включая кондитерские изделия, 10 - масло растительное и другие жиры. В таблице 1 представлены усредненные количества потребления по группам продуктов на одного человека, в таблице 2 содержится информация о стоимости питания по каждой группе на одного человека, а в таблице 3 - усредненные по группам цены, полученные делением соответствующих годовых показателей стоимости на количество потребления.

Таблица 1

Потребление основных продуктов питания в Ульяновской области в 2006-2017 гг.
(в среднем на потребителя в год, кг; 7 - шт.)

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2006	114,0	86,1	82,0	44,4	59,1	253,2	181,0	18,0	28,9	9,4
2007	102,6	76,5	76,8	55,3	57,9	247,3	176,0	19,4	26,7	9,2
2008	96,2	67,4	83,3	52,6	59,2	238,8	165,0	19,0	26,4	8,9
2009	92,0	69,5	85,7	54,7	57,9	241,3	171,0	17,3	25,5	9,1
2010	98,9	62,0	96,9	65,8	68,0	261,1	189,0	21,7	28,3	10,3
2011	98,3	59,0	99,8	66,5	73,4	268,6	193,0	22,7	29,7	10,5
2012	99,1	64,0	103,6	69,8	74,7	276,8	191,0	23,6	30,8	10,3
2013	94,9	64,8	98,3	70,6	74,7	283,4	198,0	24,4	30,1	9,8
2014	93,4	63,5	101,0	68,4	77,7	279,2	216,0	22,9	30,4	9,4
2015	91,5	61,1	111,1	65,7	78,2	285,6	211,0	22,5	29,9	9,5
2016	94,9	62,5	121,3	72,2	82,6	300,9	236,0	21,1	33,1	9,8
2017	88,4	59,1	104,1	70,5	81,8	262,5	228,0	19,2	29,8	9,6

Источник: Росстат. Потребление продуктов питания в домашних хозяйствах. URL: <https://gks.ru/compendium/document/13292>.

Таблица 2

Стоимость питания по основным группам пищевых продуктов в Ульяновской области в 2006-2017 гг.
(в среднем на потребителя в месяц, рублей)

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2006	244,5	55,3	138,6	125,2	449,7	198,9	31,2	84,0	111,0	26,5
2007	256,8	52,7	165,2	162,3	474,6	239,1	37,5	102,7	101,2	30,0
2008	329,3	63,3	215,6	199,5	588,5	328,5	43,1	128,4	119,8	47,2
2009	347,7	68,3	231,7	228,0	671,5	348,5	42,4	124,3	148,1	41,5
2010	386,4	84,4	313,5	275,1	796,7	420,9	46,9	169,6	182,5	45,8
2011	456,0	117,6	307,2	277,6	965,0	479,6	50,1	193,1	229,5	63,2
2012	499,2	62,3	322,6	311,2	1 071,4	510,6	56,0	233,9	233,7	57,6
2013	545,8	92,2	353,7	317,7	1 079,6	581,2	65,1	275,3	245,9	56,9
2014	580,5	120,5	384,4	343,6	1 228,1	670,2	79,0	276,8	263,5	52,1
2015	640,1	118,7	496,4	433,6	1 434,6	803,9	97,3	331,8	338,7	67,7
2016	732,5	93,7	568,4	510,6	1 529,4	914,5	108,3	318,5	387,1	78,0
2017	702,4	109,6	497,5	490,7	1 489,1	872,2	95,0	321,0	345,7	75,0

Источник: Росстат. Потребление продуктов питания в домашних хозяйствах. URL: <https://gks.ru/compendium/document/13292>.

Средние потребительские цены на продукты питания в Ульяновской области в 2006–2017 гг.
(рублей / кг; 7 - рублей / шт.)

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2006	25,74	7,71	20,28	33,84	91,31	9,43	2,07	56,00	46,09	33,83
2007	30,04	8,27	25,81	35,22	98,36	11,60	2,56	63,53	45,48	39,12
2008	41,08	11,27	31,06	45,51	119,29	16,51	3,13	81,09	54,45	63,64
2009	45,35	11,79	32,44	50,02	139,17	17,33	2,98	86,22	69,69	54,73
2010	46,88	16,34	38,82	50,17	140,59	19,34	2,98	93,79	77,39	53,36
2011	55,67	23,92	36,94	50,09	157,77	21,43	3,12	102,08	92,73	72,23
2012	60,45	11,68	37,37	53,50	172,11	22,14	3,52	118,93	91,05	67,11
2013	69,02	17,07	43,18	54,00	173,43	24,61	3,95	135,39	98,03	69,67
2014	74,58	22,77	45,67	60,28	189,67	28,81	4,39	145,05	104,01	66,51
2015	83,95	23,31	53,62	79,20	220,14	33,78	5,53	176,96	135,93	85,52
2016	92,62	17,99	56,23	84,86	222,19	36,47	5,51	181,14	140,34	95,51
2017	95,35	22,25	57,35	83,52	218,45	39,87	5,00	200,63	139,21	93,75

Источник: рассчитано по данным таблиц 1 и 2.

Для сравнения аналитических и основных формульных индексов по данной статистике были рассчитаны индексы цен и количеств Пааше, Ласпейреса и Фишера. Они приведены в таблице 4.

Таблица 4

Значения индексов Пааше, Ласпейреса и Фишера

t	Индексы цен			Индексы количеств		
	P_{0t}^P	P_{0t}^L	P_{0t}^F	Q_{0t}^P	Q_{0t}^L	Q_{0t}^F
0	1	1	1	1	1	1
1	1,127	1,129	1,128	0,980	0,982	0,981
2	1,452	1,459	1,456	0,965	0,970	0,967
3	1,603	1,610	1,606	0,955	0,959	0,957
4	1,706	1,725	1,716	1,077	1,089	1,083
5	1,894	1,944	1,919	1,102	1,131	1,117
6	1,973	2,000	1,987	1,147	1,162	1,154
7	2,135	2,184	2,159	1,129	1,156	1,142
8	2,348	2,413	2,381	1,131	1,162	1,147
9	2,784	2,843	2,813	1,144	1,168	1,156
10	2,894	2,961	2,927	1,208	1,236	1,222
11	2,938	3,050	2,993	1,119	1,161	1,140

Для данной статистики эффект Гершенкрона выполняется во всех позициях. В конце периода $T = 11$ превышение значения индекса цен Ласпейреса P_{0T}^L над значением индекса цен Пааше P_{0T}^P составляет 0,112, то есть 11,2%. Значение индекса количества Ласпейреса Q_{0T}^L также превосходит значение индекса Пааше Q_{0T}^P на 0,042 (4,2%).

Первый этап. Принимается предположение однородности и решаются задачи выбора различных решений λ -системы (15), по которым построены инвариантные индексы. Значение задачи (18)

минимальной релаксации $r_\lambda = 0,00022$. Это означает несовместность исходной редуцированной λ -системы и в строгом смысле - несуществование инвариантных индексов. Но небольшой уровень нарушения совместности λ -системы (15) позволяет решать ее регуляризованный вариант и использовать решения содержательных задач (19), (20) и (21) для построения приближенных инвариантных индексов, а сами решения - в качестве шаблонов решений задач второго этапа для общей системы (14).

Подбор параметра сверхрелаксации ρ , обеспечивающий устойчивость решений содержательных задач (19) - (21), дал значение $\rho = 0,000025$. При этом $r_\lambda^\rho = 0,000249$. Соответствующие решения и инвариантные индексы представлены в таблице 5.

Разница оптимистического и пессимистического вариантов конечных индексов цен $P_{0/11}$ равна $2,980 - 3,006 = -0,026$. При этом конечный объективный индекс цен 2,997 больше оптимистического на 0,017 и меньше пессимистического на 0,009. Для индексов количеств $Q_{0/11}$ разница оптимистического и пессимистического вариантов $1,145 - 1,135 = 0,01$, объективный индекс количеств 1,139 меньше оптимистического на 0,006 и больше пессимистического на 0,004. Все значения объективных индексов, как и следовало ожидать, менее уклоняются от индексов Фишера, чем предельные.

Приведенные отличия (разницы) значений оптимистического и пессимистического вариантов индексов указывают границы произвола выбора

Решения λ -системы Аффриата и инвариантные индексы

t	Оптимистические			Объективные (проекция точки Фишера)			Пессимистические		
	λ_t^{Mh}	$P_{0t}^{(opt)}$	$Q_{0t}^{(opt)}$	λ^{Fh}	$P_{0t}^{(Fh)}$	$Q_{0t}^{(Fh)}$	λ_t^{mh}	$P_{0t}^{(pes)}$	$Q_{0t}^{(pes)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,887	1,128	0,982	0,886	1,129	0,981	0,885	1,130	0,980
2	0,689	1,452	0,970	0,686	1,457	0,967	0,686	1,458	0,966
3	0,624	1,603	0,959	0,622	1,608	0,956	0,621	1,609	0,955
4	0,584	1,711	1,086	0,583	1,716	1,082	0,582	1,718	1,081
5	0,525	1,903	1,126	0,524	1,910	1,122	0,523	1,911	1,121
6	0,505	1,982	1,157	0,503	1,989	1,153	0,503	1,990	1,152
7	0,466	2,145	1,150	0,464	2,153	1,145	0,464	2,155	1,144
8	0,423	2,364	1,155	0,421	2,374	1,150	0,421	2,375	1,149
9	0,357	2,802	1,160	0,356	2,813	1,156	0,355	2,815	1,155
10	0,343	2,918	1,226	0,341	2,931	1,221	0,341	2,934	1,219
11	0,336	2,980	1,145	0,334	2,997	1,139	0,333	3,006	1,135

решений неравенств Аффриата, определяющих (уже однозначно) аналитические индексы; произвола, который может использоваться целенаправленно. Этот произвол существенно меньше, чем мера Гершенкрона отличия индексов Ласпейреса и Пааше, указанная выше: для цен 0,112, и для количеств 0,042¹¹.

На *втором этапе* решены содержательные задачи (24) и (25) для общей системы (14). Задача (22) минимальной релаксации системы (14) имеет значение $r_{\lambda u} = -0,00028$, что означает строгую совместность исходной системы Аффриата (10) и существование общих индексов Конюса. Уровень сверхрелаксации выбран $\rho = 0,000001$, соответственно, $r_{\lambda u}^{\rho} = 0$. Приемлемые решения

содержательных задач, как и в первом примере, получены решением задач, отличающихся от (24) и (25) добавлением к системе (14) дополнительных ограничений α -коридора (26) и комонотонности (27) с шаблонами: для оптимистического варианта (λ^{Mh}, u^{Mh}) , и для пессимистического варианта (λ^{mh}, u^{mh}) . По этим решениям вычислены значения задач (17) $e(p^t, e_0)$ и $e(p^0, u_t)$, по которым вычислены индексы КФ (23) - оптимистические и пессимистические. В качестве объективных индексов по среднеарифметическим числам Аффриата (28) вычислены индексы КФ $(\bar{P}_{0t}^{KF}, \bar{Q}_{0t}^{KF})$. Решения модифицированных задач (24) (λ^{Mg}, u^{Mg}) и (25) (λ^{mg}, u^{mg}) , соответствующие индексы и подобранные параметры α представлены в таблице 6.

Таблица 6

Решения общих неравенств Аффриата и индексы Конюса-Фишера

t	Оптимистический вариант, $\alpha = 0,1$				Объективный вариант (среднеарифметические числа Аффриата)				Пессимистический вариант, $\alpha = 0,12$			
	λ_t^{Mg}	u_t^{Mg}	P_{0t}^{KF}	Q_{0t}^{KF}	$\bar{\lambda}_t$	$\bar{u}_t$	$\bar{P}_{0t}^{KF}$	$\bar{Q}_{0t}^{KF}$	λ_t^{mg}	u_t^{mg}	P_{0t}^{KF}	Q_{0t}^{KF}
0	1	17580	1	1	1	17580	1	1	1	17580	1	1
1	0,976	17200	1,131	0,979	0,983	17197	1,131	0,979	0,991	17193	1,131	0,979
2	0,758	16961	1,457	0,966	0,749	16941	1,459	0,965	0,741	16920	1,461	0,964
3	0,686	16768	1,608	0,956	0,691	16740	1,610	0,955	0,696	16711	1,613	0,953
4	0,625	19114	1,714	1,084	0,569	18945	1,723	1,078	0,514	18776	1,732	1,072
5	0,570	19859	1,906	1,124	0,519	19624	1,919	1,116	0,468	19388	1,933	1,109
6	0,459	20423	1,957	1,172	0,451	20143	1,985	1,155	0,442	19864	2,014	1,138
7	0,459	20313	2,131	1,157	0,440	20037	2,156	1,144	0,420	19762	2,183	1,130
8	0,386	20386	2,335	1,169	0,382	20107	2,370	1,152	0,379	19828	2,406	1,135
9	0,324	20477	2,767	1,175	0,321	20199	2,808	1,158	0,318	19920	2,851	1,140
10	0,308	21519	2,887	1,239	0,306	21229	2,930	1,221	0,303	20939	2,975	1,202
11	0,302	20216	2,941	1,160	0,302	19910	2,993	1,140	0,303	19604	3,045	1,120

¹¹ В Руководстве по ИПЦ [1, гл. 19] приведены результаты вычислений более 20-ти наиболее признанных формульных индексов на тестовом примере, отражающем рынок развитых стран с 1973 г. до середины 1990-х годов. Разница по различным формулам превосходит трехкратные значения (с. 443).

В оптимистических вариантах значение конечного индекса цен $P_{0/11}^{KF} = 2,941$ уменьшилось относительно инвариантного $P_{0/11}^{(opt)} = 2,980$ на 4,1%. Значение индекса количества $Q_{0/11}^{KF} = 1,160$ увеличилось относительно инвариантного $Q_{0/11}^{(opt)} = 1,145$ на 1,5%. В объективных вариантах соответствующие разницы существенно меньше: по индексу цен снижение на 0,4% и по индексу количества - повышение на 0,1%. Эти различия можно увеличить при больших значениях параметра коридора α , но при этом промежуточные индексы будут сильнее уклоняться от индексов Фишера.

Заключение

Аналитические (экономические) индексы потребительского спроса были введены А.А. Конысом и другими зарубежными исследователями с целью преодоления исследовательского и социально-политического субъективизма на основе учета потребительских предпочтений большинства населения, формирующего рыночный спрос. Методы их построения довольно сложны относительно простых формульных вычислений и требуют наличия достаточно длинных временных рядов, так как здесь фактически решается обратная задача теории рыночного спроса - построение функции полезности по торговой статистике, которая относится к сложному классу некорректно поставленных задач математического моделирования. Это усложнение стандартных статистических технологий оправдано существенным повышением качества получаемых индексов потребительского спроса. Во-первых, устраняется широкий произвол выбора формул индексов. Во-вторых, аналитические индексы отражают экономическую динамику на промежутке времени, на котором экономическая конъюнктура относительно стабильна. В-третьих, выявляется неустранимый произвол (вариабельность) построения индексов спроса, и это полезно для прекращения бесплодных поисков «истинного» индекса, аналогичных поиску философского камня. При этом определяются условно «идеальные» индексы - инвариантные индексы, которые в определенных случаях можно использовать как линейное приближение сложного нелинейного процесса приспособления населения к изменению основных параметров рынков - цен и совокупных расходов покупателей. Наконец, методы использования вариабельности

построения аналитических индексов с целью представить экономическую динамику в желаемом свете (оптимизм, пессимизм, объективность) становятся прозрачными.

Литература

1. Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. Вашингтон: МВФ, 2007.
2. Кёвеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. М.: Финансы и статистика, 1990.
3. Diewert W.E. Irving Fisher and Index Number Theory // Journal of the History of Economic Thought. 2013. Vol. 35. No. 2. P. 199-232. doi: <https://doi.org/10.1017/S1053837213000072>.
4. Diewert W.E. The Consumer Price Index and Index Number Purpose // Journal of Economic and Social Measurement. 2001. Vol. 27. No. 3-4. P. 167-248.
5. Afriat S. The Index Number Problem. Construction Theorems. Oxford: Oxford University Press, 2014. 220 p. (Mathematical Review: MR3185418 of Gorbunov V.)
6. Коныс А.А. Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономический бюллетень Конъюнктурного института. 1924. № 9-10. С. 64-71.
7. Samuelson P.A., Swamy S. Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis // The American Economic Review. 1974. Vol. 64. No. 4. P. 566-593.
8. Triplett J.E. Should the Cost-of-Living Index Provide the Conceptual Framework for a Consumer Price Index? // The Economic Journal. 2001. Vol. 111. No. 472 (June). P. F311-F334.
9. Breuer C.C., Lippe P. Problems of Operationalizing the Concept of a Cost-of-Living Index. MPRA Paper No. 32902. University Library of Munich, Germany, 2011.
10. Зоркальцев В.И. Индексы цен и инфляционные процессы. Новосибирск: Наука, 1996.
11. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford University Press, 1995.
12. Deaton A., Muellbauer J. An Almost Ideal Demand System // The American Economic Review. 1980. Vol. 70. No. 3. P. 312-326.
13. Иванов Ю.Н. Новые международные стандарты по статистике цен и практика стран СНГ // Экономический журнал ВШЭ. 2007. Т. 11. № 3. С. 364-380.
14. Иванов Ю.Н. К дискуссии о точности показателей макроэкономической статистики // Вопросы статистики. 2017. Т. 24. № 9. С. 11-18.
15. Иванов Ю.Н. О некоторых базовых положениях теории индексов цен // Вопросы статистики. 2018. Т. 25. № 7. С. 23-30.
16. Горбунов В.К. Математическая модель потребительского спроса: теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004.
17. Горбунов В.К. Потребительский спрос: аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ, 2015. URL: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611.

18. **Козлова Л.А.** Алгоритмы и программы построения инвариантных и квазиинвариантных индексов потребительского спроса: дисс. ... канд. техн. наук (05.13.18). Ульяновск: УлГУ, 2010.
19. **Горбунов В.К., Козлова Л.А.** Моделирование рыночного потребительского спроса и аналитические индексы // Вопросы статистики. 2015. № 6. С. 36-45.
20. **Горбунов В.К., Львов А.Г.** Обратная задача теории рыночного спроса и аналитические индексы спроса // Журнал СВМО. 2019. Т. 25. № 1. С. 89-110.
21. **Afriat S.N.** The Construction of Utility Functions from Expenditure Data // *International Economic Review*. 1967. Vol. 8. No. 1. P. 67-77.
22. **Varian H.** The Nonparametric Approach to Demand Analysis // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. No. 4. P. 945-973.
23. **Varian H.** Non-Parametric Tests of Consumer Behaviour // *The Review of Economic Studies*. 1983. Vol. 50. No. 1. P. 99-110.
24. **Afriat S.N.** The Theory of International Comparisons of Real Income and Prices // D.J. Daly (ed.). *International Comparisons of Prices and Output*. New York: NBER, 1972. Ch. 1. P. 13-84.
25. **Hands D.W.** The Individual and the Market: Paul Samuelson on (homothetic) Santa Claus economics // *The European Journal of the History of Economic Thought*. 2014. Vol. 23. Iss. 3. P. 425-452.
26. **Поспелова Л.Я., Шананин А.А.** Показатели не-рациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 4. С. 105-116.
27. **Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А.** Обобщенный непараметрический метод. Применение к анализу товарных рынков // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 3. С. 32-45.
28. **Diewert W.E.** Afriat and Revealed Preference Theory // *Review of Economic Studies*. 1973. Vol. 40. Iss. 3. P. 419-425. doi: <https://doi.org/10.2307/2296461>.
29. **Fleissig A., G. Whitney.** Testing for the Significance of Violations of Afriat's Inequalities // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2005. Vol. 23. No. 3. P. 355-362.
30. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Информация об авторах

Горбунов Владимир Константинович - д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра цифровой экономики, Ульяновский государственный университет. 432970, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42. E-mail: vkgorbunov@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5276-0501>.

Козлова Любовь Александровна - канд. техн. наук, доцент кафедры цифровой экономики, Ульяновский государственный университет. 432970, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42. E-mail: love792003@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0247-3843>.

Львов Александр Геннадьевич - канд. экон. наук, ведущий специалист, ООО «Авиакомпания ЭйрБриджКарго». 141411, г. Москва, Международное шоссе, 28Б. E-mail: aglvov@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6726-8234>.

Финансирование

Обзор современного состояния индексологии и разработка методов построения аналитических (экономических) индексов рыночного спроса выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-010-00972 «Развитие математических моделей анализа и регулирования национальных потребительских рынков и производства».

Анализ сегмента рынка продовольственных товаров Ульяновской области выполнен при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области, проект № 18-410-730017 «Анализ потребительских рынков и производственных отраслей Ульяновской области новыми экономико-математическими методами».

References

1. *Consumer Price Index Manual: Theory and Practice*. Geneva: International Labour Office; 2004. Available from: https://www.ilo.org/public/english/bureau/stat/download/cpi/cpi_manual_en.pdf.
2. **Köves P.** *Index Theory and Economic Reality*. Budapest: Akadémiai Kiadó; 1983. (Russ. ed.: Kevesh P. *Teoriya indeksov i praktika ekonomicheskogo analiza*. Moscow: Finansy i statistika, 1990.)
3. **Diewert W.E.** Irving Fisher and Index Number Theory. *Journal of the History of Economic Thought*. 2013;35(2):199-232. Available from: <https://doi.org/10.1017/S1053837213000072>.
4. **Diewert W.E.** The Consumer Price Index and Index Number Purpose. *Journal of Economic and Social Measurement*. 2001;27(3-4):167-248.
5. **Afriat S.** *The Index Number Problem. Construction Theorems*. Oxford: Oxford University Press; 2014. 220 p. (Mathematical Review: MR3185418 of Gorbunov V.)
6. **Konüs A.A.** The Problem of the True Index of the Cost of Living. *Econometrica*. 1939;7(1):10-29. (Russ. ed.: **Konüs A.A.** *Teoriya indeksov i praktika ekonomicheskogo analiza*. *Ekonomicheskii Byulleten' Kony'unkturnogo Instituta*. 1924;(9-10):64-71.)
7. **Samuelson P.A., Swamy S.** Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis. *The American Economic Review*. 1974;64(4):566-593.

8. **Triplett J.E.** Should the Cost-of-Living Index Provide the Conceptual Framework for a Consumer Price Index? *The Economic Journal*. 2001;111(472):F311-F334.
9. **Breuer C.C., Lippe P.** Problems of Operationalizing the Concept of a Cost-Of-Living Index. *MPRA Paper*. No. 32902. 2011. Available from: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/32902/>.
10. **Zorkaltsev V.I.** *Price Indexes and Inflationary Processes*. Novosibirsk: Nauka Publ.; 1996. (In Russ.)
11. **Mas-Colell A., Whinston M., Green J.** *Microeconomic Theory*. New York: Oxford Univ. Press; 1995.
12. **Deaton A., Muellbauer J.** An Almost Ideal Demand System. *The American Economic Review*. 1980;70(3):312-326.
13. **Ivanov Yu.N.** On New International Standard in Compilation of Price Statistics and Review of Practices in CIS Countries. *HSE Economic Journal*. 2007;11(3):364-380. (In Russ.)
14. **Ivanov Yu.N.** The Debate about the Accuracy of Indicators of Macroeconomic Statistics. *Voprosy Statistiki*. 2017;(9):10-18. (In Russ.)
15. **Ivanov Yu.N.** On Some Fundamental Provisions of the Price Index Theory. *Voprosy Statistiki*. 2018;25(7):23-30. (In Russ.)
16. **Gorbulov V.K.** *Mathematical Model of Consumers' Demand: Theory and Applied Potential*. Moscow: Ekonomika Publ.; 2004. 174 p. (In Russ.)
17. **Gorbulov V.K.** *Consumers' Demand: Analytical Theory and Applications*. Ulyanovsk: UISU Press; 2015. 264 p. (In Russ.) Available from: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611.
18. **Kozlova L.A.** *Algorithms and Programs for Constructing Invariant and Quasi-Invariant Consumers' Demand Indexes*. Cand. Tech. Sci. Diss. Ulyanovsk: UISU; 2010. (In Russ.)
19. **Gorbulov V.K., Kozlova L.A.** Shaping the Market Consumer Demand and Analytical Indices of Demand. *Voprosy Statistiki*. 2015;(6):36-45. (In Russ.)
20. **Gorbulov V.K., Lvov A.G.** Inverse Problem of the Market Demand Theory and Analytical Indices of Demand. *Middle Volga Mathematical Society Journal*. 2019;25(1):89-110. (In Russ.)
21. **Afriat S.N.** The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*. 1967;8(1):67-77.
22. **Varian H.** The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*. 1982;50(4):945-973.
23. **Varian H.** Non-Parametric Tests of Consumer Behaviour. *The Review of Economic Studies*. 1983;50(1):99-110.
24. **Afriat S.N.** The Theory of International Comparisons of Real Income and Prices. In: Daly D.J. (ed.) *International Comparisons of Prices and Output*. New York: NBER; 1972. Ch. 1. P. 13-84.
25. **Hands D.W.** The Individual and The Market: Paul Samuelson on (Homothetic) Santa Claus Economics. *The European Journal of the History of Economic Thought*. 2014;23(3):425-452.
26. **Pospelova L.Ya., Shanenin A.A.** The Value of Nonrationality for Consumer Behavior and Generalized Nonparametric Method. *Matematicheskoye Modelirovaniye*. 1998;10(10):105-116. (In Russ.)
27. **Kondrakov I.A., Pospelova L.Ya., Shanenin A.A.** Generalized Nonparametric Method. Application to the Analysis of the Commodity Markets. *Trudy MFTI*. 2010;2(3):32-45. (In Russ.)
28. **Diewert W.E.** Afriat and Revealed Preference Theory. *The Review of Economic Studies*. 1973;(40):419-425. Available from: <https://doi.org/10.2307/2296461>.
29. **Fleissig A., Whitney G.** Testing for the Significance of Violations of Afriat's Inequalities. *Journal of Business and Economic Statistics*. 2005;23(3):355-362.
30. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** *Solution of Ill-Posed Problems*. New York: Winston-Wiley; 1977. 258 p. (Russ. ed.: Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody Resheniya Nekorrektnykh Zadach*. Moscow: Nauka Publ.; 1986.)

About the authors

Vladimir K. Gorbulov - Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Digital Economics, Ulyanovsk State University. 42, Leo Tolstoy Street, Ulyanovsk, 432017, Russia. E-mail: vkgorbulov@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5276-0501>.

Lyubov A. Kozlova - Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, Department of Digital Economics, Ulyanovsk State University. 42, Leo Tolstoy Street, Ulyanovsk, 432017, Russia. E-mail: love792003@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0247-3843>.

Alexander G. Lvov - Cand. Sci. (Econ.), Leading Specialist, AirBridgeCargo Airlines LLC. 28B, Mezhdunarodnoye shosse, Moscow, 141411, Russia. E-mail: aglvov@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6726-8234>.

Financing

A survey of the current state of indexology and the development of methods for constructing analytical (economic) market demand indexes were carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research, Project No. 19-010-00972 «Development of Mathematical Models for the Analysis and Regulation of National Consumer Markets and Production».

The analysis of the food market segment of the Ulyanovsk region was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Ulyanovsk Region, Project No. 18-410-730017 «Analysis of Consumer Markets and Production Sectors of the Ulyanovsk Region with New Economic and Mathematical Methods».